Под редакцией
М. И. СКАНАВИ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

6-е издание

Москва
Мир и Образование

УДК 51(076.1)
ББК 22.1
С23

Авторы

В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский, Т. Н. Маслова, И. Ф. Орловская, Р. И. Позойский, Г. С. Ряховская, М. И. Сканави, А. М. Суходский, Н. М. Федорова

Научное редактирование книги и подготовка ее к изданию выполнены *А. М. Суходским*

С23 **Сборник** задач по математике для поступающих в вузы / В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский и др.; Под ред. М. И. Сканави. — 6-е изд. — М.: Мир и Образование, 2015. — 608 с.: ил.

ISBN 978-5-94666-754-8

Сборник составлен в соответствии с программой по математике для поступающих в вузы. Он состоит из двух частей: «Арифметика, алгебра, геометрия» (часть I); «Алгебра, геометрия (дополнительные задачи). Начала анализа. Координаты и векторы» (часть II). Все задачи части I разбиты на три группы по уровню сложности. В каждой главе приведены сведения справочного характера и примеры решения задач. Ко всем задачам даны ответы.

Пособие адресовано учащимся старших классов, абитуриентам и учителям математики.

УДК 51(076.1)
ББК 22.1

ISBN 978-5-94666-754-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга представляет собой повторение шестого издания «Сборника задач по математике для поступающих во втузы» (М.: Высшая школа, 1992; Столетие, 1997–1999) с дополнительной корректировкой условий всех задач и ответов к ним, а также с исправлением замеченных неточностей. Кроме того, существенно расширен справочный материал в гл. 5, 9 и 13. При этом, учитывая, что данное издание «Сборника» используется учащимися и преподавателями в течение многих лет, авторы практически полностью сохранили весь массив его задач и их нумерацию.

«Сборник» написан в соответствии с программой по математике для поступающих во втузы. В каждой главе приведены теоретические сведения справочного характера и примеры решения задач с объяснением применяемых методов. При этом начало и конец решения примера отмечаются соответственно знаками □ и ■.

«Сборник» состоит из двух частей: «Арифметика, алгебра, геометрия» (часть I); «Алгебра, геометрия (дополнительные задачи). Начала анализа. Координаты и векторы» (часть II).

Задачи части I разделены на три группы (А, Б, В) по их нарастающей сложности. Хотя такое деление имеет более или менее условный характер, авторы полагают, что умение решать задачи из группы А должно определять минимально необходимый уровень подготовки учащихся к вступительным экзаменам в вузы. Успешное решение задач из группы Б определяет более высокое качество усвоения школьной программы. К группе В отнесены задачи повышенной трудности. Однако практика решения таких задач полезна для развития и укрепления способности к самостоятельному логическому мышлению, для обогащения математической культуры и может быть использована в школе и на факультативных занятиях.

В части II помещены не разделенные на группы по степени трудности дополнительные задачи по алгебре и геометрии, задачи по началам математического анализа, задачи на применение координат и векторов, а также задачи по теме «Комплексные числа» (гл. 18). Эта тема не входит в ныне действующую программу для поступающих во втузы, но является весьма полезной для учащихся школ, лицеев и гимназий, изучающих математику по расширенной программе и готовящихся к вступительным экзаменам во втузы. По этим же соображениям к части II следовало бы отнести и тему «Комбинаторика и бином Ньютона», однако ее пришлось оставить в части I (гл. 5), чтобы сохранить нумерацию всех глав и задач «Сборника» для удобства тех, кто использует в своей работе именно шестое его издание.

Вместе с тем в интересах учащихся и преподавателей, использующих в своей работе как шестое, так и десятое издание «Сборника», в конце книги указаны номера всех задач настоящего издания, для которых эти же задачи (под другими номерами) решены в десятом издании.

В соответствии со школьной программой обучения математике всюду (за исключением гл. 18) рассматриваются только области действительных чисел: действительные корни функций, уравнений, систем уравнений.

Начиная с третьего издания работа над «Сборником» выполнялась коллективом авторов без участия самого активного соавтора и научного редактора его первого и второго изданий М. И. Сканави, умершего в 1972 г. Специальное редактирование третьего и последующих изданий осуществлял Б. А. Кордемский. Он проделал большую работу и в процессе подготовки настоящего издания, но, к сожалению, книга вышла в свет уже без него. Мы сохраним светлую память о нем и о других наших коллегах, ушедших из жизни за последние годы, — И. Ф. Орловской, Р. И. Позойском, В. К. Егереве, В. В. Зайцеве.

Авторы сердечно благодарят учащихся и преподавателей школ, подготовительных курсов и факультетов вузов, рецензентов «Сборника», высказавших критические замечания и добрые советы, предложивших поправки. В особенности авторы признательны Р. И. Борковскому (г. Челябинск), приславшему наибольшее количество пожеланий и замечаний, учтенных при работе над книгой.

Авторы

Ч А С Т Ь I

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ

Г Л А В А 1

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

Пример. Вычислить

$$\left(\frac{928\cdot 10^{-2}}{0,8}-0,6\right):\left(\frac{\left(42\cdot 3\frac{5}{6}+3,3:0,03\right):\frac{1}{15}}{\left(3\frac{3}{4}:0,625-0,84:0,8\right):0,03}\right)^{-1}.$$

□ Обозначим выражение в первых скобках через A, а выражение во вторых скобках — через B. Последовательно находим:

1) $A=\frac{928}{80}-0,6=11,6-0,6=11;$

2) числитель дроби B:

а) $42\cdot 3\frac{5}{6}=42\cdot 3+\frac{42\cdot 5}{6}=161;$

б) $3,3:0,03=110;$

в) $(161+110)\cdot 15=271\cdot 15;$

3) знаменатель дроби B:

а) $\frac{15}{4}:\frac{5}{8}=6;$

б) $\frac{84}{80}=\frac{21}{20};$

в) $\left(6-\frac{21}{20}\right)\cdot\frac{100}{3}=200-35=165;$

4) $B=271\cdot\frac{15}{165}=\frac{271}{11}.$

Окончательно получим $A:B^{-1}=AB=11\cdot\frac{271}{11}=271.$ ■

В задачах этой главы надо выполнить указанные действия, не пользуясь микрокалькулятором, не делая округлений и приближенных вычислений, так как предполагается, что все заданные числа являются точными.

Вычислить (1.001–1.040):

1.001. $\dfrac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\dfrac{5}{16}\right):\dfrac{169}{24}}.$

1.002. $\left(\left(\dfrac{7}{9}-\dfrac{47}{72}\right):1{,}25+\dfrac{7}{40}\right):(0{,}358-0{,}108)\cdot 1{,}6-\dfrac{19}{25}.$

1.003. $\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\dfrac{1}{4}\right):18\dfrac{1}{3}}.$

1.004. $\left(\dfrac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\dfrac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\dfrac{3}{70}}+0{,}125\right):2\dfrac{1}{2}+0{,}43.$

1.005. $\dfrac{2\dfrac{3}{4}:1{,}1+3\dfrac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\dfrac{1}{3}}:\dfrac{5}{7}-\dfrac{\left(2\dfrac{1}{6}+4{,}5\right)\cdot 0{,}375}{2{,}75-1\dfrac{1}{2}}.$

1.006. $\dfrac{\left(13{,}75+9\dfrac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{5}{9}}+\dfrac{\left(6{,}8-3\dfrac{3}{5}\right)\cdot 5\dfrac{5}{6}}{\left(3\dfrac{2}{3}-3\dfrac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\dfrac{1}{6}.$

1.007. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{6}+0{,}1+\dfrac{1}{15}\right):\left(\dfrac{1}{6}+0{,}1-\dfrac{1}{15}\right)\cdot 2{,}52}{\left(0{,}5-\dfrac{1}{3}+0{,}25-\dfrac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\dfrac{1}{6}\right)\cdot\dfrac{7}{13}}.$

1.008. $\left(\dfrac{3\dfrac{1}{3}+2{,}5}{2{,}5-1\dfrac{1}{3}}\cdot\dfrac{4{,}6-2\dfrac{1}{3}}{4{,}6+2\dfrac{1}{3}}\cdot 5{,}2\right):\left(\dfrac{0{,}05}{\dfrac{1}{7}-0{,}125}+5{,}7\right).$

1.009. $\dfrac{0{,}4+8\left(5-0{,}8\cdot\dfrac{5}{8}\right)-5:2\dfrac{1}{2}}{\left(1\dfrac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\dfrac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\dfrac{2}{5}}\cdot 90.$

1.010. $\dfrac{\left(5\dfrac{4}{45}-4\dfrac{1}{6}\right):5\dfrac{8}{15}}{\left(4\dfrac{2}{3}+0{,}75\right)\cdot 3\dfrac{9}{13}}\cdot 34\dfrac{2}{7}+\dfrac{0{,}3:0{,}01}{70}+\dfrac{2}{7}.$

1.011. $\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}+0{,}425-0{,}005\right):0{,}1}{30{,}5+\dfrac{1}{6}+3\dfrac{1}{3}}+\dfrac{6\dfrac{3}{4}+5\dfrac{1}{2}}{26:3\dfrac{5}{7}}-0{,}05.$

1.012. $\dfrac{3\dfrac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\dfrac{1}{2}}{\dfrac{62}{75}-0{,}16}:\dfrac{3{,}5+4\dfrac{2}{3}+2\dfrac{2}{15}}{0{,}5\left(1\dfrac{1}{20}+4{,}1\right)}.$

1.013. $\dfrac{\left(1\dfrac{1}{5}:\left(\dfrac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\right)\cdot 1{,}7}{\dfrac{5}{6}+1\dfrac{1}{3}-1\dfrac{23}{30}}+\dfrac{4{,}75+7\dfrac{1}{2}}{33:4\dfrac{5}{7}}:0{,}25.$

1.014. $\dfrac{\left(4{,}5\cdot 1\dfrac{2}{3}-6{,}75\right)\cdot\dfrac{2}{3}}{\left(3\dfrac{1}{3}\cdot 0{,}3+5\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{8}\right):2\dfrac{2}{3}}+\dfrac{1\dfrac{4}{11}\cdot 0{,}22:0{,}3-0{,}96}{\left(0{,}2-\dfrac{3}{40}\right)\cdot 1{,}6}.$

1.015. $\dfrac{\left(1{,}88+2\dfrac{3}{25}\right)\cdot\dfrac{3}{16}}{0{,}625-\dfrac{13}{18}:\dfrac{26}{9}}+\dfrac{\left(\dfrac{0{,}216}{0{,}15}+0{,}56\right):0{,}5}{\left(7{,}7:24\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{15}\right)\cdot 4{,}5}.$

1.016. $\left(16\dfrac{1}{2}-13\dfrac{7}{9}\right)\cdot\dfrac{18}{33}+2{,}2\left(\dfrac{8}{33}-\dfrac{1}{11}\right)+\dfrac{2}{11}.$

1.017. $\dfrac{0{,}128:3{,}2+0{,}86}{\dfrac{5}{6}\cdot 1{,}2+0{,}8}\cdot\dfrac{\left(1\dfrac{32}{63}-\dfrac{13}{21}\right)\cdot 3{,}6}{0{,}505\cdot\dfrac{2}{5}-0{,}002}.$

1.018. $\dfrac{3\dfrac{1}{3}:10+0{,}175:0{,}35}{1{,}75-1\dfrac{11}{17}\cdot\dfrac{51}{56}}-\dfrac{\left(\dfrac{11}{18}-\dfrac{1}{15}\right):1{,}4}{\left(0{,}5-\dfrac{1}{9}\right)\cdot 3}.$

1.019. $\dfrac{0{,}125:0{,}25+1\dfrac{9}{16}:2{,}5}{(10-22:2{,}3)\cdot 0{,}46+1{,}6}+\left(\dfrac{17}{20}+1{,}9\right)\cdot 0{,}5.$

1.020. $\left(\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}-\left(0{,}6:3\frac{3}{4}\right)2\frac{1}{2}+3{,}75:1\frac{1}{2}\right):2{,}2.$

1.021. $\left(2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}+\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}\right)\cdot\frac{1}{3}.$

1.022. $\dfrac{0{,}5+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+0{,}125}{\frac{1}{3}+0{,}4+\frac{14}{15}}+\dfrac{(3{,}75-0{,}625)\cdot\frac{48}{125}}{12{,}8\cdot 0{,}25}.$

1.023. $\left(26\frac{2}{3}:6{,}4\right)\cdot\left(19{,}2:3\frac{5}{9}\right)-\dfrac{8\frac{4}{7}:2\frac{26}{77}}{0{,}5:18\frac{2}{3}\cdot 11}-\dfrac{1}{18}.$

1.024. $\dfrac{0{,}725+0{,}6+\frac{7}{40}+\frac{11}{20}}{0{,}128\cdot 6\frac{1}{4}-0{,}0345:\frac{3}{25}}\cdot 0{,}25.$

1.025. $\left((520\cdot 0{,}43):0{,}26-217+2\frac{3}{7}\right)-\left(31{,}5:12\frac{3}{5}+114\cdot 2\frac{1}{3}+61\frac{1}{2}\right).$

1.026. $\dfrac{(3{,}4-1{,}275)\cdot\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\cdot\left(1\frac{7}{85}+6\frac{2}{17}\right)}+0{,}5\cdot\left(2+\dfrac{12{,}5}{5{,}75+\frac{1}{2}}\right).$

1.027. $\left(\dfrac{3{,}75+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}-1{,}875}-\dfrac{2\frac{3}{4}+1{,}5}{2{,}75-1\frac{1}{2}}\right)\cdot\dfrac{10}{11}.$

1.028. $((21{,}85:43{,}7+8{,}5:3{,}4):4{,}5):1\frac{2}{5}+1\frac{11}{21}.$

1.029. $\left(1\frac{2}{5}+3{,}5:1\frac{1}{4}\right):2\frac{2}{5}+3{,}4:2\frac{1}{8}-0{,}35.$

1.030. $\dfrac{\left(0{,}3275-\left(2\frac{15}{88}+\frac{4}{33}\right):12\frac{2}{9}\right):0{,}07}{(13-0{,}416):6{,}05+1{,}92}.$

1.031. $\dfrac{\frac{5}{6}-\frac{21}{45}}{1\frac{5}{6}}\cdot\dfrac{1{,}125+1\frac{3}{4}-\frac{5}{12}}{0{,}59}.$

1.032. $\dfrac{\left(3^{-1}-\sqrt{1\frac{7}{9}}\right)^{-2}:0{,}25}{\frac{37}{300}:0{,}0925}+12{,}5\cdot 0{,}64.$

1.033. $\dfrac{\left(\frac{5}{8}+2\frac{17}{24}\right):2{,}5}{\left(1{,}3+\frac{23}{30}+\frac{4}{11}\right)\cdot\frac{110}{401}}\cdot 0{,}5.$

1.034. $\dfrac{((7-6{,}35):6{,}5+9{,}9)\cdot\frac{1}{12{,}8}}{\left(1{,}2:36+1\frac{1}{5}:0{,}25-1\frac{5}{6}\right)\cdot 1\frac{1}{4}}:0{,}125.$

1.035. $\dfrac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot\frac{26}{99}}{\left(18\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{1}{85}}\cdot 0{,}5.$

1.036. $\dfrac{3{,}75:1\frac{1}{2}+\left(1{,}5:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}.$

1.037. $\dfrac{\left(\left(4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):\frac{9}{4}+2{,}5:1{,}25:6{,}75\right):1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}.$

1.038. $\dfrac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}.$

1.039. $\left(\dfrac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-\dfrac{\left(1\frac{13}{20}-1{,}5\right)\cdot 1{,}5}{\left(2{,}44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right):62\frac{1}{20}+1{,}364:0{,}124.$

1.040. $5\frac{4}{7}:\left(8{,}4\cdot\frac{6}{7}\cdot\left(6-\dfrac{(2{,}3+5:6{,}25)\cdot 7}{8\cdot 0{,}0125+6{,}9}\right)-20{,}384:1{,}3\right).$

Найти X из пропорции (1.041–1.045):

1.041. $\dfrac{\left(4-3{,}5\cdot\left(2\dfrac{1}{7}-1\dfrac{1}{5}\right)\right):0{,}16}{X}=\dfrac{3\dfrac{2}{7}-\dfrac{3}{14}:\dfrac{1}{6}}{41\dfrac{23}{84}-40\dfrac{49}{60}}.$

1.042. $\dfrac{1{,}2:0{,}375-0{,}2}{6\dfrac{4}{25}:15\dfrac{2}{5}+0{,}8}=\dfrac{0{,}016:0{,}12+0{,}7}{X}.$

1.043. $\dfrac{0{,}125X}{\left(\dfrac{19}{24}-\dfrac{21}{40}\right)\cdot 8\dfrac{7}{16}}=\dfrac{\left(1\dfrac{28}{63}-\dfrac{17}{21}\right)\cdot 0{,}7}{0{,}675\cdot 2{,}4-0{,}02}.$

1.044. $\dfrac{X}{10{,}5\cdot 0{,}24-15{,}15:7{,}5}=\dfrac{9\left(1\dfrac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\dfrac{3}{40}-4\dfrac{3}{8}:7}.$

1.045. $\dfrac{15{,}2\cdot 0{,}25-48{,}51:14{,}7}{X}=\dfrac{\left(\dfrac{13}{44}-\dfrac{2}{11}-\dfrac{5}{66}:2\dfrac{1}{2}\right)\cdot 1\dfrac{1}{5}}{3{,}2+0{,}8\left(5\dfrac{1}{2}-3{,}25\right)}.$

Вычислить наиболее рациональным способом (1.046–1.048):

1.046. $\dfrac{\sqrt{6{,}3\cdot 1{,}7}\left(\sqrt{\dfrac{6{,}3}{1{,}7}}-\sqrt{\dfrac{1{,}7}{6{,}3}}\right)}{\sqrt{(6{,}3+1{,}7)^2-4\cdot 6{,}3\cdot 1{,}7}}.$

1.047. $\left(\dfrac{\sqrt{561^2-459^2}}{4\dfrac{2}{7}\cdot 0{,}15+4\dfrac{2}{7}:\dfrac{20}{3}}+4\sqrt{10}\right):\dfrac{1}{3}\sqrt{40}.$

1.048. $\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\dfrac{3}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}\right)^2.$

Вычислить (1.049–1.050):

1.049. $\dfrac{2^{-2}+5^0}{(0{,}5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}}+4{,}75.$

1.050. $\dfrac{(0{,}6)^0-(0{,}1)^{-1}}{(3:2^3)^{-1}\cdot(1{,}5)^3+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-1}}.$

ГЛАВА 2

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Свойства степеней

Для любых x и y и любых положительных a и b верны следующие равенства:

$$a^0 = 1; \tag{2.1}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \tag{2.2}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}; \tag{2.3}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}; \tag{2.4}$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \tag{2.5}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \tag{2.6}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \tag{2.7}$$

Формулы преобразования многочленов

Для любых a, b и c верны следующие равенства:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \tag{2.8}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \tag{2.9}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \tag{2.10}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{или } (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b); \tag{2.11}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\text{или } (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b); \tag{2.12}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2); \tag{2.13}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2); \tag{2.14}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \tag{2.15}$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Свойства арифметических корней

Для любых натуральных n и k, больших 1, и любых неотрицательных a и b верны следующие равенства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \tag{2.16}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b \neq 0); \tag{2.17}$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \tag{2.18}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}; \tag{2.19}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \tag{2.20}$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \ \ (a \geq 0); \tag{2.21}$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ если } 0 \leq a < b; \tag{2.22}$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0; \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \tag{2.24}$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \ (a \geq 0). \tag{2.25}$$

Пример 1. Упростить выражение

$$\frac{x^4 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 + \sqrt{3x} + 1} + 2\left(\sqrt[6]{27x^3} - \frac{1}{2}\right).$$

☐ Обозначим дробь через A, а выражение в скобках – через B; тогда заданное выражение примет вид $A + 2B$. Заметим, что для $\sqrt{3x}$ и $\sqrt[6]{27x^3}$ допустимыми являются только значения $x \geq 0$, при которых знаменатель дроби A не равен нулю. Поэтому и для заданного выражения допустимыми являются только значения $x \geq 0$.

Используя формулу (2.9), выделяем в числителе дроби A полный квадрат:

$$x^4 + 2x^2 + 1 - 3x = (x^2 + 1)^2 - 3x.$$

Так как $x \geq 0$, то в силу равенства (2.21) имеем $3x = (\sqrt{3x})^2$. Тогда полученное выражение с помощью формулы (2.8) можно разложить на множители как разность квадратов:

$$(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{3x})^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{3x})(x^2 + 1 + \sqrt{3x}).$$

Следовательно,

$$A=\frac{(x^2-\sqrt{3x}+1)(x^2+\sqrt{3x}+1)}{x^2+\sqrt{3x}+1}=x^2-\sqrt{3x}+1.$$

Далее на основании формулы (2.20) имеем $\sqrt[6]{27x^3}=\sqrt[6]{(3x)^3}=\sqrt{3x}$, откуда $B=\sqrt{3x}-\frac{1}{2}$. Итак, $A+2B=x^2-\sqrt{3x}+1+2\sqrt{3x}-1=x^2+\sqrt{3x}$. ■

Пример 2. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b},\ 0<a<2b.$$

□ Имеем $\sqrt{a^2-4ab+4b^2}=\sqrt{(a-2b)^2}=|a-2b|=2b-a$, аналогично, $\sqrt{a^2+4ab+4b^2}=|a+2b|=a+2b$; здесь были использованы формулы (2.9), (2.10) и (2.23). Следовательно, $\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}=\frac{2b-a}{2b+a}$. Теперь находим

$$\frac{2b-a}{2b+a}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b}=\frac{(2b-a)\ (a-2b)-8ab+2b(a+2b)}{a^2-4b^2}=\frac{a}{2b-a}.\ ■$$

Пример 3. Упростить выражение

$$f(x)=\frac{x^2+4x-5+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{x^2-4x-5+(x+5)\sqrt{x^2-1}},\ x>1.$$

□ Используя формулу (2.15), разложим на множители квадратные трехлены в числителе и знаменателе дроби:

$$f(x)=\frac{(x+5)(x-1)+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{(x-5)(x+1)+(x+5)\sqrt{x^2-1}}.$$

Так как $x>1$, то в силу соотношения (2.21) имеем $x-1=\sqrt{(x-1)^2}$ и $x+1=\sqrt{(x+1)^2}$. Значит,

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}\,((x+5)\sqrt{x-1}+(x-5)\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}((x-5)\sqrt{x+1}+(x+5)\sqrt{x-1})},$$

откуда после сокращения получим $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. ■

Пример 4. Не прибегая к приближенным вычислениям, упростить числовое выражение

$$A=(4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}}-\sqrt[6]{13+4\sqrt{3}})\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}.$$

☐ Используя формулы (2.16), (2.8), (2.20) и (2.10), находим:

$$1)\ 4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}=4\sqrt[3]{\frac{12-1}{11}}=4;$$

$$2)\ \sqrt[6]{13+4\sqrt{3}}\sqrt[6]{\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{11}\right)^2}=\sqrt[6]{(13+4\sqrt{3})\frac{12-4\sqrt{3}+1}{11^2}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{(13+4\sqrt{3})(13-4\sqrt{3})}{11^2}}=\sqrt[6]{\frac{169-48}{11^2}}=1.$$

Окончательно получим $A = 4 - 1 = 3$. ■

Пример 5. Проверить справедливость равенства

$$\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=4.$$

☐ Положим $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=x$. Возведем в куб обе части этого равенства. Используя формулу (2.11), получаем

$$38+\sqrt{1445}+38-\sqrt{1445}+3\sqrt[3]{(38+\sqrt{1445})(38-\sqrt{1445})}\ x=x^3,$$

или $x^3 + 3x - 76 = 0$. Подстановкой $x = 4$ убеждаемся в том, что $x = 4$ является одним из корней полученного кубического уравнения: $64 + 12 - 76 = 0$.

Преобразуем это кубическое уравнение:

$$x^3 - 64 = 3(4 - x);\ (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 3(x - 4) = 0;\ (x - 4)(x^2 + 4x + 19) = 0.$$

Но множитель $x^2 + 4x + 19$ не имеет действительных корней. Значит, 4 — единственное возможное действительное значение для x, чем и доказано требуемое равенство (поскольку очевидно, что $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}$ — действительное число). ■

Пример 6. Проверить справедливость равенства

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2.$$

☐ Рассмотрим равенство

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Очевидно, что если оно верно, то верно и заданное равенство. Пусть $a=\dfrac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}$, $b=2+\sqrt{3}$. Легко установить, что $a>0$ и $b>0$. Если при этом выполняется равенство $a^2=b^2$, то $a=b$. Находим

$$a^2=\frac{(7+4\sqrt{3})\,(19-8\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})^2}=\frac{(7+4\sqrt{3})\,(19-8\sqrt{3})}{19-8\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3};$$

$$b^2=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}.$$

Так как $a^2=b^2$, то $a=b$, т.е. заданное равенство справедливо.

Этот пример можно решить быстрее, если догадаться, что оба подкоренных выражения в условии являются квадратами положительных чисел, а именно: $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$ и $19-8\sqrt{3}=(4-\sqrt{3})^2$. Тогда левая часть заданного равенства есть $\dfrac{(2+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=2$ и $2=2$. ■

Пример 7. Чему равна сумма выражений $\sqrt{24-t^2}$ и $\sqrt{8-t^2}$, если известно, что их разность равна 2 (значение переменной t находить не нужно)?

☐ Согласно условию, $\sqrt{24-t^2}-\sqrt{8-t^2}=2$. Используя формулу $a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$, получим $\sqrt{24-t^2}+\sqrt{8-t^2}=\dfrac{24-8}{2}=8$. ■

Группа А

Упростить выражения и вычислить их, если даны числовые значения параметров (2.001–2.124):

2.001. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}.$

2.002. $((\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})^{-2}+(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})^{-2}):\dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}.$

2.003. $\dfrac{\left(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}{2\sqrt{a^3b}}:\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}-2\right);\ a>b>0.$

2.004. $\left(\dfrac{(a+b)^{-n/4}c^{1/2}}{a^{2-n}b^{-3/4}}\right)^{4/3}:\left(\dfrac{b^3c^4}{(a+b)^{2n}a^{16-8n}}\right)^{1/6}$; $b=0{,}04$.

2.005. $\dfrac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}}-\dfrac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$.

2.006. $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\dfrac{1}{b}}+3\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)}:\dfrac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}$.

2.007. $\dfrac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}:\dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}$.

2.008. $\left(\left(\dfrac{2^{3/2}+27y^{3/5}}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt[10]{32y^2}-2\right)3^{-2}\right)^5$.

2.009. $\dfrac{2\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)}$.

2.010. $t\cdot\dfrac{1+\dfrac{2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}}+\sqrt{t+4}+\dfrac{4}{\sqrt{t+4}}$.

2.011. $\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2$.

2.012. $\dfrac{x-1}{x+x^{0,5}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}$.

2.013. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}\right)$.

2.014. $\dfrac{x-y}{x^{3/4}+x^{1/2}y^{1/4}}\cdot\dfrac{x^{1/2}y^{1/4}+x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/4}y^{-1/4}}{x^{1/2}-2x^{1/4}y^{1/4}+y^{1/2}}$.

2.015. $\sqrt[n]{y^{\frac{2n}{m-n}}} : \sqrt[m]{y^{\frac{(m-n)^2+4mn}{m^2-n^2}}}$.

2.016. $\left(\dfrac{(z^{2/p}+z^{2/q})^2-4z^{2/p+2/q}}{(z^{1/p}-z^{1/q})^2+4z^{1/p+1/q}}\right)^{1/2}$.

2.017. $\dfrac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1.$

2.018. $\left(\dfrac{1+x+x^2}{2x+x^2}+2-\dfrac{1-x+x^2}{2x-x^2}\right)^{-1}(5-2x^2);\ x=\sqrt{3{,}92}.$

2.019. $\dfrac{(x^2-y^2)(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^3}-\sqrt[3]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^5}}-(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2});\ x=64.$

2.020. $\sqrt{\dfrac{2a}{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4+\frac{8}{a}+\frac{4}{a^2}}{\sqrt{2}}}.$

2.021. $\dfrac{4x(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})^4-1}.$

2.022. $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-2:\sqrt{x}}.$

2.023. $\sqrt[4]{6x(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}.$

2.024. $\sqrt[6]{4x(11+4\sqrt{6})}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}.$

2.025. $\dfrac{a^3-a-2b-b^2a^{-1}}{\left(1-\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}}\right)(a+\sqrt{a+b})}:\left(\dfrac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{a-b}\right);a=23,\ b=22.$

2.026. $\dfrac{\left(\sqrt[5]{a^{4/3}}\right)^{3/2}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}}\right)^6}.$

2.027. $\dfrac{\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\cdot\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$

2.028. $\dfrac{x(x^2-a^2)^{-1/2}+1}{a(x-a)^{-1/2}+(x-a)^{1/2}}:\dfrac{a^2\sqrt{x+a}}{x-(x^2-a^2)^{1/2}}+\dfrac{1}{x^2-ax}.$

2.029. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{(r^2+4)\sqrt{1+\dfrac{4}{r^2}}}-\sqrt[3]{(r^2-4)\sqrt{1-\dfrac{4}{r^2}}}\right)^2}{r^2-\sqrt{r^4-16}}.$

2.030. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{a}+\dfrac{a}{\sqrt{2}}+2}-\dfrac{a^2\sqrt[4]{2}-2\sqrt{a}}{a\sqrt{2a}-\sqrt[4]{8a^4}}.$

2.031. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{1/2}\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)(a-\sqrt{a^3})^{-1}.$

2.032. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{abc+4}{a}+4\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc}+2};\ a=0{,}04.$

2.033. $\dfrac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{4p+2\sqrt{4p^2-1}}}.$

2.034. $1-\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}:\dfrac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}.$

2.035. $\left(\dfrac{a+2}{\sqrt{2a}}-\dfrac{a}{\sqrt{2a}+2}+\dfrac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}.$

2.036. $\left(\sqrt[4]{36mn^2p}+m\sqrt{\dfrac{3n}{m}}+\sqrt{3np}\right)\left(\sqrt[4]{36mn^2p}-\sqrt{3mn}-p\sqrt{\dfrac{3n}{p}}\right).$

2.037. $\dfrac{1-x^{-2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}}-\dfrac{2}{x^{3/2}}+\dfrac{x^{-2}-x}{x^{1/2}-x^{-1/2}}.$

2.038. $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right).$

2.039. $\dfrac{9b^{4/3}-\dfrac{a^{3/2}}{b^2}}{\sqrt{a^{3/2}b^{-2}+6a^{3/4}b^{-1/3}+9b^{4/3}}}\cdot\dfrac{b^2}{a^{3/4}-3b^{5/3}};\ b=4.$

2.040. $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\dfrac{a-b-c}{abc};\ a=0{,}02,\ b=-11{,}05,\ c=1{,}07.$

2.041. $\dfrac{1}{2(1+\sqrt{a})}+\dfrac{1}{2(1-\sqrt{a})}-\dfrac{a^2+2}{1-a^3}.$

2.042. $\dfrac{\sqrt{2}(x-a)}{2x-a}-\left(\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{-1}\right)^{1/2};\ a=0{,}32,\ x=0{,}08.$

2.043. $\dfrac{\left(m^2-\dfrac{1}{n^2}\right)^m\left(n+\dfrac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2-\dfrac{1}{m^2}\right)^n\left(m-\dfrac{1}{n}\right)^{m-n}}.$

2.044. $\left(\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\dfrac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right):\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1};\ x>a>0.$

2.045. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2+\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^{-1/2}.$

2.046. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}+\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right).$

2.047. $\dfrac{\dfrac{a-b}{2a-b}-\dfrac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{(4b^4+4ab^2+a^2):(2b^2+a)}(b^2+b+ab+a).$

2.048. $\dfrac{(2p-q)^2+2q^2-3pq}{2p^{-1}+q^2}:\dfrac{4p^2-3pq}{2+pq^2};\ p=0{,}78,\ q=\dfrac{7}{25}.$

2.049. $\left(\dfrac{pq^3}{(p+q)^{5/2}}-\dfrac{2pq^2}{(p+q)^{3/2}}+\dfrac{pq}{\sqrt{p+q}}\right):\left(\dfrac{p^2}{(p+q)^{5/2}}-\dfrac{p^2q}{(p+q)^{7/2}}\right).$