



---

# сборник задач ПО МАТЕМАТИКЕ

---

**с решениями  
8–11 классы**

под редакцией  
М.И. СКАНАВИ

Москва  
Мир и Образование

# Часть первая. АЛГЕБРА

## ГЛАВА 1 ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

#### *Свойства степеней*

Для любых  $x$  и  $y$  и любых положительных  $a$  и  $b$  верны следующие равенства:

$$a^0 = 1; \quad (1.1)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad (1.2)$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}; \quad (1.3)$$

$$(a^x)^y = a^{xy}; \quad (1.4)$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \quad (1.5)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \quad (1.6)$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \quad (1.7)$$

#### *Формулы сокращенного умножения*

Для любых  $a$ ,  $b$  и  $c$  верны следующие равенства:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \quad (1.8)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (1.9)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (1.10)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (1.11)$$

или  $(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3;$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (1.12)$$

$$\text{или } (a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3;$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2); \quad (1.13)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2); \quad (1.14)$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad (1.15)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ .

### *Свойства арифметических корней*

Для любых натуральных  $n$  и  $k$ , больших 1, и любых неотрицательных  $a$  и  $b$  верны следующие равенства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad (1.16)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0); \quad (1.17)$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \quad (1.18)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; \quad (1.19)$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \quad (1.20)$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad (a \geq 0); \quad (1.21)$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ если } 0 \leq a < b; \quad (1.22)$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0; \end{cases} \quad (1.23)$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \quad (1.24)$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0). \quad (1.25)$$

## Группа А

Упростить выражения и вычислить их, если даны числовые значения параметров (1.1–1.10):

$$1.1 \quad \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}} \left( 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) : \frac{a-b-c}{abc};$$

$$a = 0,02, b = -11,05, c = 1,07.$$

$$1.2 \quad \left( \frac{1}{t^2 + 3t + 2} + \frac{2t}{t^2 + 4t + 3} + \frac{1}{t^2 + 5t + 6} \right)^2 \frac{(t-3)^2 + 12t}{2}.$$

$$1.3 \quad \frac{(a-b)^2 + ab}{(a+b)^2 - ab} : \frac{a^5 + b^5 + a^2b^3 + a^3b^2}{(a^3 + b^3 + a^2b + ab^2)(a^3 - b^3)}.$$

$$1.4 \quad \frac{3a^2 + 2ax - x^2}{(3x+a)(a+x)} - 2 + 10 \frac{ax - 3x^2}{a^2 - 9x^2}.$$

$$1.5 \quad \left( \left( \frac{x}{y-x} \right)^{-2} - \frac{(x+y)^2 - 4xy}{x^2 - xy} \right)^2 \frac{x^4}{x^2y^2 - y^4}.$$

$$1.6 \quad \frac{\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2c}{ab} \right) (a+b+2c)}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} - \frac{4c^2}{a^2b^2}}; a = 7,4, b = \frac{5}{37}.$$

$$1.7 \quad \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-3} + b^{-3}} : \frac{a^2b^2}{(a+b)^2 - 3ab} \left( \frac{a^2 - b^2}{ab} \right)^1;$$

$$a = 1 - \sqrt{2}, b = 1 + \sqrt{2}.$$

$$1.8 \quad \frac{1}{b(abc + a + c)} - \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}; \frac{1}{a + \frac{1}{b}}.$$

$$1.9 \quad \frac{1 + (a+x)^{-1}}{1 - (a+x)^{-1}} \left( 1 - \frac{1 - (a^2 + x^2)}{2ax} \right); x = \frac{1}{a-1}.$$

$$1.10 \quad \frac{\left(m^2 - \frac{1}{n^2}\right)^m \left(n + \frac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2 - \frac{1}{m^2}\right)^n \left(m - \frac{1}{n}\right)^{m-n}}.$$

Не прибегая к приближенным вычислениям, упростить числовые выражения (1.11 – 1.13):

$$1.11 \quad \left(4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}} - \sqrt[6]{13+4\sqrt{3}}\right)\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}.$$

$$1.12 \quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}+5)^{-1}.$$

$$1.13 \quad 5\sqrt{48\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} + \sqrt{32\sqrt[3]{\frac{9}{4}}} - 11\sqrt[3]{12\sqrt{8}}.$$

Упростить выражения и вычислить их, если даны числовые значения параметров (1.14 – 1.24):

$$1.14 \quad \frac{x^4 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 + \sqrt{3x+1}} + 2\left(\sqrt[6]{27x^3} - \frac{1}{2}\right).$$

$$1.15 \quad \frac{\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2}}{\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2}} - \frac{8ab}{a^2 - 4b^2} + \frac{2b}{a - 2b}, \quad 0 < a < 2b.$$

$$1.16 \quad \frac{x^2 + 4x - 5 + (x-5)\sqrt{x^2-1}}{x^2 - 4x - 5 + (x+5)\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1.$$

$$1.17 \quad \frac{9b^{\frac{4}{3}} - \frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^2}}{\sqrt{a^{\frac{3}{2}}b^{-2} + 6a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{4}{3}}}} \cdot \frac{b^2}{a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{5}{3}}}; \quad b = 4.$$

$$1.18 \quad \frac{\left(\sqrt[3]{(r^2+4)}\sqrt{1+\frac{4}{r^2}} - \sqrt[3]{(r^2-4)}\sqrt{1-\frac{4}{r^2}}\right)^2}{r^2 - \sqrt{r^4 - 16}}.$$

$$1.19 \quad \left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}} + \frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2-x+a}}\right) : \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}; \quad x > a > 0.$$

$$1.20 \quad \left( \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}} - t^3 + \sqrt[3]{\frac{t^5 + 2t^4 + 4t^3}{4 - 4t + t^2}} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{t}} \right).$$

$$1.21 \quad \left( \frac{(a+b)^{-\frac{n}{4}} c^{\frac{1}{2}}}{a^{2-n} b^{-\frac{3}{4}}} \right)^{\frac{4}{3}} : \left( \frac{b^3 c^4}{(a+b)^{2n} a^{16-8n}} \right)^{\frac{1}{6}}; b = 0,04.$$

$$1.22 \quad \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4b}{(a-b) : \left( \sqrt{\frac{1}{b}} + 3\sqrt{\frac{1}{a}} \right)} : \frac{a + 9b + 6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}}.$$

$$1.23 \quad \left( \frac{\left( z^{\frac{2}{p}} + z^{\frac{2}{q}} \right)^2 - 4z^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q}}}{\left( z^{\frac{1}{p}} - z^{\frac{1}{q}} \right)^2 + 4z^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$1.24 \quad \frac{\sqrt{\frac{abc+4}{a}} + 4\sqrt{\frac{bc}{a}}}{\sqrt{abc} + 2}; a = 0,04.$$

1.25 Проверить справедливость равенства

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt[3]{\frac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}.$$

1.26 Дано выражение

$$\frac{x^3 - a^{-\frac{2}{3}} b^{-1} (a^2 + b^2) x + b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}} x^2}.$$

Сделать подстановку  $x = a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{1}{2}}$  и результат упростить

Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби (1.27 – 1.28):

$$1.27 \quad \frac{2 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}.$$

$$1.28 \quad \frac{a-1}{\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}}.$$

- 1.29 Вычислить сумму кубов двух чисел, если их сумма и произведение соответственно равны 11 и 21.
- 1.30 Преобразовать  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$  так, чтобы получилось  $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ .

### Группа Б

Упростить выражения и вычислить их, если даны числовые значения параметров (1.31 – 1.52):

$$1.31 \quad \frac{a^3 - 2a^2 + 5a + 26}{a^3 - 5a^2 + 17a - 13}.$$

$$1.32 \quad \frac{p^3 + 4p^2 + 10p + 12}{p^3 - p^2 + 2p + 16} \cdot \frac{p^3 - 3p^2 + 8p}{p^2 + 2p + 6}.$$

$$1.33 \quad \left( \frac{x^4 + 5x^3 + 15x - 9}{x^6 + 3x^4} + \frac{9}{x^4} \right) \cdot \frac{x^3 - 4x + 3x^2 - 12}{x^5}.$$

$$1.34 \quad (x^4 - 7x^2 + 1)^{-2} \left( \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 - 14 \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 + 77 \right); x = \frac{\sqrt[4]{125}}{5}.$$

$$1.35 \quad \left( \frac{bx + 4 + \frac{4}{bx}}{2b + (b^2 - 4)x - 2bx^2} + \frac{(4x^2 - b^2)\frac{1}{b}}{(b + 2x)^2 - 8bx} \right) \frac{bx}{2}.$$

$$1.36 \quad \frac{x^4 + x^2 + x\sqrt{2} + 2}{x^2 - x\sqrt{2} + 2} - x\sqrt{2}.$$

$$1.37 \quad \sqrt[3]{\frac{2x^2}{9 + 18x + 9x^2}} \cdot \sqrt{\frac{(1+x)\sqrt[3]{1-x}}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{x}}}.$$

$$1.38 \quad \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{x^2 - 1}{2x} \right)^2}}{(x^2 + 1)\frac{1}{x}}.$$

$$1.39 \quad \frac{\sqrt{2b + 2\sqrt{b^2 - 4}}}{\sqrt{b^2 - 4 + b + 2}}.$$

$$1.40 \quad \frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(x-1)^{-\frac{1}{2}} - (x+1)^{-\frac{1}{2}}}; x = \frac{a^2+1}{2a}.$$

$$1.41 \quad \left( \frac{(x + \sqrt[3]{2ax^2})(2a + \sqrt[3]{4a^2x})^{-1} - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}} - (2a)^{-\frac{1}{3}} \right)^{-6}.$$

$$1.42 \quad \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1-x^2}} (\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3})}{2 + \sqrt{1-x^2}}.$$

$$1.43 \quad \frac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2} \cdot m - 4\sqrt{m-4}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}} \cdot \frac{m-4\sqrt{m-4}}{2}.$$

$$1.44 \quad \frac{2(a + (a+1) + (a+2) + \dots + 2a)}{a^2 + 3a + 2} + \frac{6(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})}{(a-b)^{0.6}(a+2)};$$

$$: ((a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a-b)^{-\frac{2}{5}})^{-1}.$$

$$1.45 \quad \left( \frac{(1+a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{6}}}{(a^{\frac{1}{2}}+1)^{-\frac{1}{3}}} - \frac{(a^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{3}}}{(1-a^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{6}}} \right)^{-2} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a+\sqrt{a-1}}}.$$

$$1.46 \quad \frac{\sqrt{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} - 2}{\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3}} (2x + \sqrt{x^2-1}).$$

$$1.47 \quad \frac{x + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{3}}} + \frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{3}}}; x = 2.$$

$$1.48 \quad \frac{\frac{|b-1|}{b} + b|b-1| + 2 - \frac{2}{b}}{\sqrt{b-2 + \frac{1}{b}}}.$$

$$1.49 \quad \frac{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)^2 - 1}}{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)^2 - 1} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{a}} - \sqrt{a}\right)}.$$



$$1.50 \quad \frac{\sqrt{x-4}\sqrt{x-4}+2}{\sqrt{x+4}\sqrt{x-4}-2}.$$

$$1.51 \quad \left( \frac{|x-1|}{x-1} \cdot x^2 - 2x \cdot \frac{|x+1|}{x+1} + 2x - 4 \right) : |x-2|.$$

$$1.52 \quad \sqrt{\left(y^2 + \frac{4}{y^2}\right)^2 - 8\left(y + \frac{2}{y}\right)^2 + 48}.$$

Проверить справедливость равенств (1.53 – 1.55):

$$1.53 \quad \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}} - \sqrt{3} = 2.$$

$$1.54 \quad \sqrt[3]{38 + \sqrt{1445}} + \sqrt[3]{38 - \sqrt{1445}} = 4.$$

$$1.55 \quad \sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}} - \sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}} = 2\sqrt{3m-n}.$$

1.56 Упростить выражение

$$y = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}},$$

а затем построить график функции  $y$  для  $1 \leq x < \infty$ .

1.57 Исключив  $u$  и  $v$  из равенств  $u - v = a$ ,  $u^2 - v^2 = b$ ,  $u^3 - v^3 = c$ , найти соотношение между  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

1.58 Показать, что

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{n}{2n + 4}.$$

1.59 Определить  $A$ ,  $B$  и  $C$  так, чтобы для всех допустимых значений  $x$  имело место равенство

$$\frac{x^2 + 5}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 1}.$$

1.60 Число 19 представить в виде разности кубов натуральных чисел. Показать, что такое представление единственно.

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ

1.1 Введем обозначения:

$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}} = A; \quad 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = B; \quad \frac{a-b-c}{abc} = C.$$

Тогда заданное выражение примет вид  $A \cdot B : C$ . В выражении  $A$  допустимыми являются значения  $a \neq 0$ ,  $b \neq -c$ . Приведя дроби к общему знаменателю, получим

$$A = \frac{b+c-a}{b+c+a};$$

для выражения  $B$ , используя формулу (1.8), находим

$$B = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

Следовательно,

$$A \cdot B = \frac{b+c-a}{b+c+a} \cdot \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{(b+c-a)^2}{2bc};$$

$$A \cdot B : C = \frac{(b+c-a)^2}{2bc} \cdot \frac{abc}{a-b-c} = \frac{a(b+c-a)^2}{2(a-b-c)}.$$

Подставив заданные значения, имеем

$$\frac{0,02(0,02+11,05-1,07)}{2} = 0,1.$$

Ответ: 0,1.

1.2 Используя формулу (1.15), разложим на множители стоящие в знаменателе квадратные трехчлены:

$$t^2 + 3t + 2 = (t+1)(t+2); \quad t^2 + 4t + 3 = (t+1)(t+3);$$

$$t^2 + 5t + 6 = (t+2)(t+3).$$

Отсюда видно, что для существования дробей необходимо, чтобы  $t \neq -1$ ;  $t \neq -2$ ;  $t \neq -3$ . Приведя сумму дробей к общему знаменателю, получим

## Оглавление

От авторов .....	3
------------------	---

### Часть I. Алгебра

<b>Глава 1. Тожественные преобразования</b>	
<b>алгебраических выражений .....</b>	<b>5</b>
Элементы теории .....	5
Условия задач .....	7
Решения, указания .....	13
<b>Глава 2. Алгебраические уравнения .....</b>	<b>41</b>
Элементы теории .....	41
Условия задач .....	42
Решения, указания .....	49
<b>Глава 3. Применение уравнений к решению задач .....</b>	<b>75</b>
Элементы теории .....	75
Условия задач .....	77
Решения, указания .....	91
<b>Глава 4. Тожественные преобразования</b>	
<b>тригонометрических выражений .....</b>	<b>117</b>
Элементы теории .....	117
Условия задач .....	120
Решения, указания .....	128
<b>Глава 5. Тригонометрические уравнения .....</b>	<b>159</b>
Элементы теории .....	159
Условия задач .....	165
Решения, указания .....	169
<b>Глава 6. Прогрессии .....</b>	<b>195</b>
Элементы теории .....	195
Условия задач .....	196
Решения, указания .....	200

<b>Глава 7. Логарифмы. Показательные и логарифмические уравнения .....</b>	<b>210</b>
Элементы теории .....	210
Условия задач .....	214
Решения, указания .....	222
<b>Глава 8. Неравенства .....</b>	<b>254</b>
Элементы теории .....	254
Условия задач .....	260
Решения, указания .....	267
<b>Глава 9. Комбинаторика и бином Ньютона .....</b>	<b>298</b>
Элементы теории .....	298
Условия задач .....	300
Решения, указания .....	304
<b>Глава 10. Комплексные числа .....</b>	<b>312</b>
Элементы теории .....	312
Условия задач .....	314
Решения, указания .....	320
<b>Глава 11. Дополнительные задачи по алгебре .....</b>	<b>337</b>
Условия задач .....	337
Решения, указания .....	343
<b>Глава 12. Начала математического анализа .....</b>	<b>368</b>
Элементы теории .....	368
Условия задач .....	370
Решения, указания .....	378

## **Часть II. Геометрия**

<b>Глава 1. Задачи по планиметрии .....</b>	<b>403</b>
Элементы теории .....	403
Условия задач .....	406
Решения, указания .....	413
<b>Глава 2. Задачи по стереометрии .....</b>	<b>446</b>
Элементы теории .....	446
Условия задач .....	449
Решения, указания .....	454
<b>Глава 3. Задачи по геометрии с применением тригонометрии .....</b>	<b>487</b>

Элементы теории .....	487
Условия задач .....	489
Решения, указания .....	499
<b>Глава 4. Дополнительные задачи по геометрии.....</b>	<b>570</b>
Условия задач .....	570
Решения, указания .....	573
<b>Глава 5. Применение координат и векторов</b>	
<b>к решению задач .....</b>	<b>589</b>
Элементы теории .....	589
Условия задач .....	593
Решения, указания .....	596