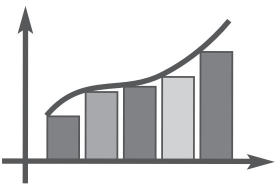
Т.Н. Маслова
А.М. Суходский

МАТЕМАТИКА
полный справочник

ВЕСЬ ШКОЛЬНЫЙ КУРС
5—11 КЛАССЫ



Москва
Мир и Образование

АЛГЕБРА

Раздел I

ЧИСЛА

§ 1. Натуральные числа

1. Запись натуральных чисел. Числа 1, 2, 3, 4, 5, ..., использующиеся для счета предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов, называются ***натуральными***. Любое натуральное число в десятичной системе счисления записывается с помощью ***цифр*** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Например, запись 2457 означает, что 2 — цифра тысяч, 4 — цифра сотен, 5 — цифра десятков и 7 — цифра единиц, т. е.

$$2457 = 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7.$$

Вообще, если a — цифра тысяч, b — цифра сотен, c — цифра десятков и d — цифра единиц, то имеем

$$a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d.$$

Используется также сокращенная запись $\overline{abcd}$ (написать $abcd$ нельзя, поскольку такая запись означает произведение чисел a, b, c, d).

В общей форме для m-значного числа a_m справедлива запись

$$a_m = c_1 \cdot 10^{m-1} + c_2 \cdot 10^{m-2} + \ldots + c_{m-1} \cdot 10 + c_m,$$

или

$$a_m = \overline{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} c_m},$$

где

$$c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}, c_m \text{ — цифры.}$$

2. Арифметические действия над натуральными числами. Результатом сложения или умножения двух натуральных чисел всегда является натуральное число: если m, n — натуральные числа, то $p = m + n$ также натуральное число, m и n — ***слагаемые***, p — ***сумма***; $p = mn$ также натуральное число, m, n — ***множители***, p — ***произведение***.

Справедливы следующие свойства:

1^0. $a + b = b + a$ (***переместительное свойство сложения***);

2^0. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (***сочетательное свойство сложения***);

3^0. $ab = ba$ (***переместительное свойство умножения***);

4^0. $(ab)\,c = a\,(bc)$ (***сочетательное свойство умножения***);

5^0. $a\,(b + c) = ab + ac$ (***распределительное свойство умножения относительно сложения***).

В результате вычитания или деления натуральных чисел не всегда получается натуральное число.

Если m, n, k — натуральные числа, то *при* $m - n = k$ говорят, что m — ***уменьшаемое***, n — ***вычитаемое***, k — ***разность***; при $m : n = k$ говорят, что m — ***делимое***, n — ***делитель***, k — ***частное***; число m называют также ***кратным*** числа n, а число n — ***делителем*** числа m. Если m — кратное числа n, то существует натуральное число k такое, что $m = kn$.

Из чисел с помощью знаков арифметических действий и скобок составляют ***числовые выражения***. Если в числовом выражении выполнить указанные действия, соблюдая принятый порядок, то получится число, которое называется ***значением выражения***.

Напомним порядок арифметических действий в числовом выражении: прежде всего выполняют действия в скобках; внутри любых скобок сначала выполняют умножение и деление, а затем сложение и вычитание. Например, если нужно найти значение выражения

$$(28 \cdot 93 + (1927 - 1873) \cdot 31) : 6 - 710,$$

то порядок действий таков:

$$(28 \overset{1}{\cdot} 93 \overset{4}{+} (1927 \overset{2}{-} 1873) \overset{3}{\cdot} 31) \overset{5}{:} 6 \overset{6}{-} 710.$$

3. Деление с остатком. Если натуральное число m не делится на натуральное число n, т. е. не существует такого натурального числа k, что $m = nk$, то рассматривают ***деление с остатком***. Например, при делении числа 43 на число 18 в частном получается 2 и в остатке 7, т. е. $43 = 18 \cdot 2 + 7$. В общем случае, *если m — **делимое**, n — **делитель*** ($m > n$), *p — **частное*** и *r — **остаток***, то

$$m = np + r, \qquad (1)$$

где $r < n$. Здесь m, n, p, r — натуральные числа (исключение составляет случай, когда m делится на n без остатка и $r = 0$). Например, если $n = 3$, а $r = 2$, то $m = 3p + 2$. Это формула чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2.

П р и м е р. Найти частное и остаток от деления числа 36 421 на число 25.

❑ Выполним деление «углом»:

$$\begin{array}{l|l}
-36421 & 25 \\ \cline{2-2}
\underline{\ \ 25\ \ \ \ } & 1456 \\
-114 & \\
\underline{\ \ 100\ \ } & \\
\ \ -142 & \\
\ \ \ \underline{125} & \\
\ \ \ \ -171 & \\
\ \ \ \ \ \underline{150} & \\
\ \ \ \ \ \ \ 21 &
\end{array}$$

Итак, частное 1456, а остаток 21. Воспользовавшись равенством (1), можем записать:

$$36\,421 = 25 \cdot 1456 + 21.$$

Заметим, что этот пример можно решить и по-другому, не используя деление «углом», а непосредственно используя формулу (1). Имеем $36\,421 = 36\,400 + 21 = 25 \cdot 1456 + 21$. Значит, 1456 — частное, а 21 — остаток. ■

4. Разложение натурального числа на простые множители. Если число имеет только два делителя — само себя и единицу, то оно называется ***простым***; если число имеет более двух делителей, то оно называется ***составным***; число 1 не относят ни к простым, ни к составным. Так, число 37 простое, оно имеет только два делителя: 1 и 37; число 36 составное, оно имеет более двух делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Простое число 37 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел только одним способом (если не учитывать порядок множителей): $37 = 1 \cdot 37$; составное число 36 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел более чем одним способом: $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12$ и т. д. Однако в виде произведения простых множителей составное число 36 можно представить только одним способом: $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Т.1.1. *Любое составное число можно разложить на простые множители, причем только одним способом.*

Если в разложении числа на простые множители один и тот же множитель a встречается n раз, то записывают кратко: a^n, т. е. $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = a^n$. Выражение a^n называют ***степенью***, a — ***основанием степени***, n — ***показателем степени***.

Поэтому можно записать:

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

5. Наибольший общий делитель нескольких натуральных чисел. Пусть даны числа 72 и 96. Выпишем все делители числа 72:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.$$

Выпишем все делители числа 96:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.$$

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.$$

Все эти числа называют ***общими делителями*** чисел 72 и 96, а наибольшее из них — ***наибольшим общим делителем***.

Для любых заданных натуральных чисел a и b можно найти наибольший общий делитель. Он обозначается D (a, b) (читается: «D от a, b»). Если числа a и b таковы, что D $(a, b) = 1$, то они называются ***взаимно простыми***.

Например, взаимно простыми являются числа 72 и 35 (хотя каждое из них — составное число).

Чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение общих простых множителей, взяв каждый из них с наименьшим (из имеющихся) показателем.

Пример. Найти D (3780, 7056).

❑ Имеем $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$, $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$. Тогда D $(3780, 7056) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$; взяты те простые множители, которые входят и в разложение числа 3780, и в разложение числа 7056. ■

6. Наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел. Пусть даны числа 12 и 18. Выпишем несколько чисел, кратных числу 12:

$$12, 24, 36, 48, 60, 72, \ldots .$$

Выпишем числа, кратные 18:

$$18, 36, 54, 72, \ldots .$$

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

$$36, 72, \ldots .$$

Такие числа называют ***общими кратными*** чисел 12 и 18, а наименьшее из них (число 36) — ***наименьшим общим кратным***.

Аналогично определяется наименьшее общее кратное произвольных чисел a и b, оно обозначается K (a, b) (читается: «K от a, b»). Любое общее кратное чисел a и b делится на K (a, b).

Чтобы найти наименьшее общее кратное нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение всех получившихся простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим (из имеющихся) показателем.

П р и м е р. Найти K (3780, 7056).

❑ Имеем $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$; $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ (см. п. 5). Тогда $K\,(3780, 7056) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$, т. е. взяты все простые множители, которые входят в разложение хотя бы одного из чисел 3780 и 7056. Итак, $K\,(3780, 7056) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 105\,840$. ■

Для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство

$$D\,(a, b) \cdot K\,(a, b) = ab.$$

Если, в частности, числа a и b взаимно простые, т. е. $D\,(a, b) = 1$, то $K\,(a, b) = ab$. Это значит, что *наименьшее общее кратное двух взаимно простых* *чисел равно произведению этих чисел*. Например, К (15, 16) = 15 · 16 = 240.

7. Признаки делимости. В некоторых случаях, не выполняя деления натурального числа n на натуральное число a, можно ответить на вопрос, делится ли n на a без остатка или нет. Это достигается с помощью различных признаков делимости.

Иногда удобно пользоваться сокращенной записью $n \vdots a$, означающей, что натуральное число n делится на натуральное число a (без остатка).

Т.1.2. *Если в сумме натуральных чисел каждое слагаемое делится на натуральное число а, то и вся сумма делится на число а* (***теорема о делимости суммы***).

Кратко это можно записать так:

$$\text{если } m \vdots a,\ n \vdots a,\ k \vdots a, \text{ то и } (m+n+k) \vdots a.$$

Однако не следует считать, что если каждое слагаемое суммы не делится на какое-то число, то и сумма не делится на это число. Например, сумма 37 + 19 делится на 4, хотя ни 37, ни 19 не являются кратными числа 4. Вместе с тем, заметим, что если все слагаемые, кроме одного, делятся на некоторое число, то сумма не делится на это число.

Т.1.3. *Если в произведении хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число* (***теорема о делимости произведения***).

Например, не выполняя умножения, можно утверждать, что произведение 105 · 48 · 93 · 54 делится на 5, так как 105 делится на 5.

Т.1.4. *Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2* (***признак делимости на 2***).

Т.1.5. *Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5* (***признак делимости на 5***).

Т.1.6. *Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0* (***признак делимости на 10***).

Т.1.7. *Натуральное число, содержащее не менее трех цифр, делится на 4 тогда и только тогда, когда делится на 4 двузначное число, образованное последними двумя цифрами заданного числа* (***признак делимости на 4***).

Например, 4724 делится на 4, так как двузначное число 24 делится на 4; 4318 не делится на 4, поскольку двузначное число 18 не делится на 4.

Т.1.8. *Натуральное число, содержащее не менее трех цифр, делится на 25 тогда и только тогда, когда делится на 25 двузначное число, образованное последними двумя цифрами заданного числа* (***признак делимости на 25***).

Т.1.9. *Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3* (***признак делимости на 3***).

Например, 27 426 делится на 3, поскольку сумма его цифр, т. е. число 21, делится на 3. В то же время 17 945 не делится на 3, так как сумма его цифр, т. е. число 26, не делится на 3.

Т.1.10. *Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9* (***признак делимости на 9***).

Т.1.11. *Если натуральное число n имеет своими делителями числа a и b, то оно делится и на их наименьшее кратное.*

П р и м е р. Не выполняя деления, установить, делится ли 26 775 на 225.

❑ Функция $y = 2x - 1$ возрастает на всей числовой прямой, значит, у нее есть обратная функция. Чтобы найти эту обратную функцию, надо решить уравнение $2x - 1 = y$ относительно x. Имеем $x = 0{,}5\,(y + 1)$. Поменяв x и y местами, получим $y = 0{,}5\,(x + 1)$. Это и есть искомая обратная функция. ■

Если точка $(x;\ y)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(y;\ x)$ принадлежит графику обратной функции. Поэтому график обратной функции получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования плоскости xOy, переводящего точку $(x;\ y)$ в точку $(y;\ x)$. Этим преобразованием является симметрия относительно прямой $y = x$.

Таким образом, *чтобы построить график функции, обратной функции* $y = f(x)$, *надо график функции* $y = f(x)$ *преобразовать симметрично относительно прямой* $y = x$ (рис. 40, *а*).

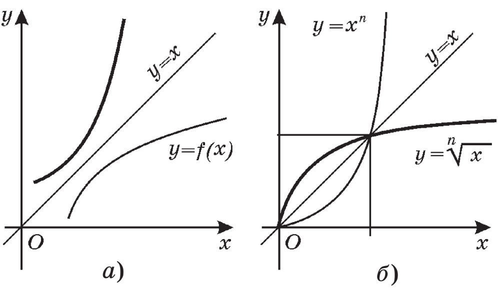


Рис. 40

Например, если $y = x^n$, где $x \geq 0$, n — натуральное, $n > 1$, то $x = \sqrt[n]{y}$. Поменяв x и y местами, получим $y = \sqrt[n]{x}$. Графики двух взаимно обратных функций $y = x^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 40, *б*).

116. Логарифмическая функция. Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, обладает всеми свойствами, которые гарантируют существование обратной функции (см. теорему 3.4): 1) область определения — вся числовая прямая; 2) множество значений — промежуток $(0, +\infty)$; 3) функция $y = a^x$ возрастает при $a > 0$ и убывает при $0 < a < 1$.

Указанные свойства обеспечивают существование функции, обратной показательной, определенной на $(0, +\infty)$ и имеющей в качестве множества своих значений всю числовую прямую.

Эта обратная функция обозначается так: $y = \log_a x$ (читается: «логарифм числа x по основанию a»). Итак, ***логарифмическая функция*** $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, — это функция, обратная показательной функции $y = a^x$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ обладает следующими свойствами (они вытекают из теоремы 3.4):

1^0. Область определения — луч $(0, +\infty)$.

2^0. Множество значений — вся числовая прямая.

3^0. Функция ни четная, ни нечетная.

4^0. Функция возрастает на промежутке $(0, +\infty)$ при $a > 1$, убывает на $(0, +\infty)$ при $0 < a < 1$.

5^0. Ось Oy является вертикальной асимптотой графика (если $a > 1$, то $y \to -\infty$ при $x \to 0$, а если $0 < a < 1$, то $y \to +\infty$ при $x \to 0$).

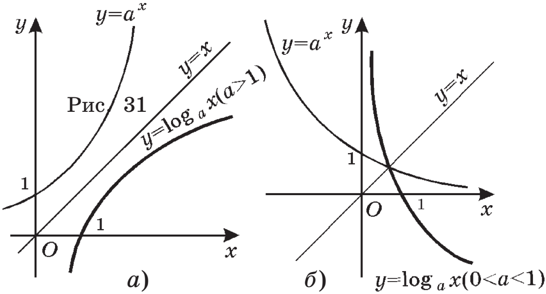


Рис. 41

График функции $y = \log_a x$ можно получить из графика функции $y = a^x$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$. На рис. 41, *а* построен график логарифмической функции для $a > 1$, а на рис. 41, *б* — для $0 < a < 1$.

117. Число *e*. Функция $y = e^x$. Функция $y = \ln x$. Среди показательных функций $y = a^x$, где $a > 1$, особый интерес для математики и ее приложений представляет функция, обладающая следующим свойством: касательная к графику функции (см. п. 224) в точке (0; 1) образует с осью Ox угол 45° (рис. 42). Основание a такой функции $y = a^x$ принято обозначать буквой e, т. е. $y = e^x$. Подсчитано, что $e = 2{,}7182818284590\ldots$, и установлено, что e — иррациональное число, которое можно представить как следующую сумму:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} + \ldots .$$

Именно с помощью этого равенства и находят значение числа e с любой точностью.

Функцию $y = e^x$ иногда называют ***экспонентой***.

Логарифмическую функцию, обратную экспоненте $y = e^x$, т. е. функцию $y = \log_e x$, принято обозначать $y = \ln x$ (где ln читается: «***натуральный логарифм***»). Графики функций $y = e^x$ и $y = \ln x$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 43).

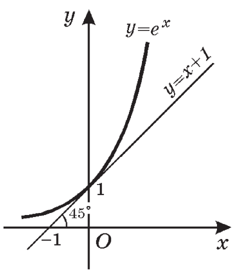


Рис. 42

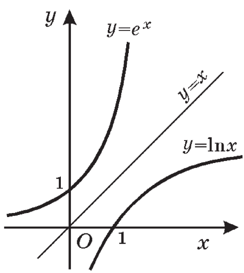


Рис. 43

СОДЕРЖАНИЕ

АЛГЕБРА

Раздел I. Числа

Раздел III. Функции и графики

Раздел VI. Элементы комбинаторики

Раздел VII. Элементы математического анализа

ГЕОМЕТРИЯ

Раздел VIII.
Основные понятия геометрии