поступающим в вузы

Сборник задач по МАТЕМАТИКЕ

(с указаниями и решениями)

В двух книгах

КНИГА 1

Алгебра

Под редакцией М. И. Сканави

10-е издание, исправленное

Москва
Мир и Образование
Астрель
ОНИКС

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее (десятое, исправленное) издание «Сборника задач по математике для поступающих в вузы (с решениями)», как и предыдущие три издания, состоит из двух книг (книга 1 — «Алгебра», книга 2 — «Геометрия»). При этом сохранен почти весь массив задач пятого—девятого изданий и произведена дополнительная корректировка условий и решений всех задач. Сохранены и теоретические сведения справочного характера, примеры решения задач с объяснением применяемых методов, а также разделение задач на три группы (А, Б, В) по их возрастающей трудности в тех главах, где такое разделение было осуществлено и в предыдущих изданиях «Сборника».

Хотя такое деление имеет более или менее условный характер, авторы полагают, что умение решать задачи из группы А должно определять минимально необходимый уровень подготовки учащихся к вступительным экзаменам в вузы. Успешное решение задач из группы Б определяет более высокое качество усвоения школьной программы. К группе В отнесены задачи повышенной трудности, однако практика решения таких задач полезна для развития и укрепления способности к самостоятельному логическому мышлению, для обогащения математической культуры и может быть использована в школе и на факультативных занятиях.

В каждой главе внутри групп А, Б, В задачи объединены по типам и методам решения. Кроме того, в каждой из групп А, Б и В к наиболее типичным задачам даны полные решения или указания, помещенные в конце книги. Тем самым «Сборник» приобретает новое качество — он становится дополнительным к школьным учебникам пособием для самообучения в процессе подготовки к вступительным экзаменам в вузы.

В соответствии со школьной программой обучения математике всюду (за исключением гл. 17) рассматриваются только области действительных чисел: действительные корни функций, уравнений, систем уравнений.

Учитывая интересы учащихся школ, лицеев и гимназий, изучающих математику по расширенной программе, авторы включили в раздел «Дополнение» главы «Комбинаторика и бином Ньютона» (гл. 16) и «Комплексные числа» (гл. 17). Несмотря на то что эти темы не входят в действующую программу для поступающих в вузы, они окажутся весьма полезными для тех, кто интересуется математикой и готовится к поступлению в вузы, где к абитуриентам предъявляются повышенные требования по этому предмету. Наконец, «Сборник» завершает раздел «Приложение», который содержит «Вопросы и задачи для самопроверки» и «Варианты билетов для вступительных письменных экзаменов».

В «Сборнике» приняты следующие обозначения: начало и конец решения задачи отмечаются соответственно знаками □ и ■ , а вместо слова «Указание» употребляется знак ●. При этом для удобства пользования книгой номера условий тех задач, к которым даны решения (указания), обведены рамкой (соответственно овальной линией).

В настоящем десятом издании «Сборника» исправлены замеченные неточности и опечатки.

Начиная с третьего издания работа над «Сборником» выполнялась коллективом авторов без участия самого активного соавтора и научного редактора его первого и второго изданий М. И. Сканави, умершего в 1972 г. Специальное редактирование третьего и последующих изданий осуществлял Б. А. Кордемский. Он проделал огромную работу и в процессе подготовки предыдущего (девятого) издания (1999 г.), но, к сожалению, книга вышла в свет уже без него. Мы сохраним светлую память о нем и о других наших коллегах, ушедших из жизни за последние годы, — И. Ф. Орловской, Р. И. Позойском, В. К. Егереве, В. В. Зайцеве.

Авторы сердечно благодарят учащихся и преподавателей школ, подготовительных курсов и факультетов вузов, рецензентов «Сборника», высказавших критические замечания и добрые советы, предложивших поправки. В особенности авторы признательны Р. И. Борковскому (г. Челябинск), приславшему наибольшее количество пожеланий и замечаний, учтенных при работе над книгой.

Авторы

ГЛАВА 1

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Свойства степеней

Для любых x и y и любых положительных a и b верны следующие равенства:

$$a^0 = 1; \tag{1.1}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \tag{1.2}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}; \tag{1.3}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}; \tag{1.4}$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \tag{1.5}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \tag{1.6}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \tag{1.7}$$

Формулы преобразования многочленов

Для любых a, b и c верны следующие равенства:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \tag{1.8}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \tag{1.9}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \tag{1.10}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{или } (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b); \tag{1.11}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\text{или } (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b); \tag{1.12}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \tag{1.13}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2); \tag{1.14}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \tag{1.15}$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Свойства арифметических корней

Для любых натуральных n и k, больших 1, и любых неотрицательных a и b верны следующие равенства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \tag{1.16}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \, (b \neq 0); \tag{1.17}$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \tag{1.18}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}; \tag{1.19}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \tag{1.20}$$

$$(\sqrt[n]{a}\,)^n = a \;\; (a \geq 0); \tag{1.21}$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ если } 0 \leq a < b; \tag{1.22}$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \;\text{ при } a \geq 0, \\ -a \;\text{ при } a < 0; \end{cases} \tag{1.23}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \tag{1.24}$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \, (a \geq 0). \tag{1.25}$$

Пример 1. Упростить выражение

$$\frac{x^4 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 + \sqrt{3x} + 1} + 2\left(\sqrt[6]{27x^3} - \frac{1}{2}\right).$$

☐ Обозначим дробь через A, а выражение в скобках — через B; тогда заданное выражение примет вид $A + 2B$. Заметим, что для $\sqrt{3x}$ и $\sqrt[6]{27x^3}$ допустимыми являются только значения $x \geq 0$, при которых знаменатель дроби A не равен нулю. Поэтому и для заданного выражения допустимыми являются только значения $x \geq 0$.

Используя формулу (1.9), выделяем в числителе дроби A полный квадрат:

$$x^4 + 2x^2 + 1 - 3x = (x^2 + 1)^2 - 3x.$$

Так как $x \geq 0$, то в силу равенства (1.21) имеем $3x = (\sqrt{3x})^2$. Тогда полученное выражение с помощью формулы (1.8) можно разложить на множители как разность квадратов:

$$(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{3x})^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{3x})(x^2 + 1 + \sqrt{3x}).$$

Следовательно,

$$A=\frac{(x^2-\sqrt{3x}+1)(x^2+\sqrt{3x}+1)}{x^2+\sqrt{3x}+1}=x^2-\sqrt{3x}+1.$$

Далее на основании формулы (1.20) имеем $\sqrt[6]{27x^3}=\sqrt[6]{(3x)^3}=\sqrt{3x}$, откуда $B=\sqrt{3x}-\frac{1}{2}$. Итак, $A+2B=x^2-\sqrt{3x}+1+2\sqrt{3x}-1=x^2+\sqrt{3x}$. ■

Пример 2. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b},\ 0<a<2b.$$

□ Имеем $\sqrt{a^2-4ab+4b^2}=\sqrt{(a-2b)^2}=|a-2b|=2b-a$, аналогично $\sqrt{a^2+4ab+4b^2}=|a+2b|=a+2b$; здесь были использованы формулы (1.9), (1.10) и (1.23). Следовательно, $\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}=\frac{2b-a}{2b+a}$. Теперь находим

$$\frac{2b-a}{2b+a}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b}=\frac{(2b-a)\,(a-2b)-8ab+2b(a+2b)}{a^2-4b^2}=\frac{a}{2b-a}.\ ■$$

Пример 3. Упростить выражение

$$f\,(x)=\frac{x^2+4x-5+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{x^2-4x-5+(x+5)\sqrt{x^2-1}},\ x>1.$$

□ Используя формулу (1.15), разложим на множители квадратные трехчлены в числителе и знаменателе дроби:

$$f\,(x)=\frac{(x+5)(x-1)+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{(x-5)(x+1)+(x+5)\sqrt{x^2-1}}.$$

Так как $x>1$, то в силу соотношения (1.21) имеем $x-1=\sqrt{(x-1)^2}$ и $x+1=\sqrt{(x+1)^2}$. Значит,

$$f\,(x)=\frac{\sqrt{x-1}\,((x+5)\sqrt{x-1}+(x-5)\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}((x-5)\sqrt{x+1}+(x+5)\sqrt{x-1})},$$

откуда после сокращения получим $f\,(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. ■

Пример 4. Не прибегая к приближенным вычислениям, упростить числовое выражение

$$A=(4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}}-\sqrt[6]{13+4\sqrt{3}})\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}.$$

□ Используя формулы (1.16), (1.8), (1.20) и (1.10), находим:

1) $4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}=4\sqrt[3]{\frac{12-1}{11}}=4;$

2) $\sqrt[6]{13+4\sqrt{3}}\sqrt[6]{\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{11}\right)^2}=\sqrt[6]{(13+4\sqrt{3})\frac{12-4\sqrt{3}+1}{11^2}}=$

$=\sqrt[6]{\frac{(13+4\sqrt{3})(13-4\sqrt{3})}{11^2}}=\sqrt[6]{\frac{169-48}{11^2}}=1.$

Окончательно получим $A = 4 - 1 = 3$. ■

Пример 5. Проверить справедливость равенства

$$\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=4.$$

□ Положим $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=x$. Возведем в куб обе части этого равенства. Используя формулу (1.11), получаем

$$38+\sqrt{1445}+38-\sqrt{1445}+3\sqrt[3]{(38+\sqrt{1445})(38-\sqrt{1445})}\;x=x^3,$$

или $x^3 + 3x - 76 = 0$. Подстановкой $x = 4$ убеждаемся в том, что $x = 4$ является одним из корней полученного кубического уравнения: $64 + 12 - 76 = 0$.

Преобразуем это кубическое уравнение:

$x^3 - 64 = 3(4 - x)$; $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 3(x - 4) = 0$; $(x - 4)(x^2 + 4x + 19) = 0$.

Но множитель $x^2 + 4x + 19$ не имеет действительных корней. Значит, 4 — единственное возможное действительное значение для x, чем и доказано требуемое равенство (поскольку очевидно, что $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}$ — действительное число). ■

Пример 6. Проверить справедливость равенства

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2.$$

□ Рассмотрим равенство

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Очевидно, что если оно верно, то верно и заданное равенство. Пусть $a=\dfrac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}$, $b=2+\sqrt{3}$. Легко установить, что $a>0$ и $b>0$. Если при этом выполняется равенство $a^2=b^2$, то $a=b$. Находим

$$a^2=\frac{(7+4\sqrt{3})\,(19-8\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})^2}=\frac{(7+4\sqrt{3})\,(19-8\sqrt{3})}{19-8\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3};$$

$$b^2=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}.$$

Так как $a^2=b^2$, то $a=b$, т. е. заданное равенство справедливо.

Этот пример можно решить быстрее, если догадаться, что оба подкоренных выражения в условии являются квадратами положительных чисел, а именно: $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$ и $19-8\sqrt{3}=(4-\sqrt{3})^2$. Тогда левая часть заданного равенства есть $\dfrac{(2+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=2$ и $2=2$. ■

Пример 7. Чему равна сумма выражений $\sqrt{24-t^2}$ и $\sqrt{8-t^2}$, если известно, что их разность равна 2 (значение переменной t находить не нужно)?

□ Согласно условию, $\sqrt{24-t^2}-\sqrt{8-t^2}=2$. Используя формулу $a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$, получим

$$\sqrt{24-t^2}+\sqrt{8-t^2}=\frac{24-8}{2}=8.\ ■$$

Группа А

Упростить выражения и вычислить их, если даны числовые значения параметров (1.001—1.124):

1.001. $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\dfrac{a-b-c}{abc}$; $a=0{,}02$, $b=-11{,}05$, $c=1{,}07$.

1.002. $\left(\dfrac{1}{t^2+3t+2}+\dfrac{2t}{t^2+4t+3}+\dfrac{1}{t^2+5t+6}\right)^2\dfrac{(t-3)^2+12t}{2}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ