

Борис Кордемский

259

**МАТЕМАТИЧЕСКИХ
ЗАВЛЕКАЛОК**

Логические миниатюры,
занимательные эссе,
фантазии и задачи

Москва
Мир и Образование

Только забавляясь и учимся.

Анатоль Франс

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемые в данной книге математические миниатюры — занимательные эссе и сказочки, фантазии и просто задачи, легкие и трудные, но всегда общедоступные, тренирующие и шлифующие собственное мышление, — объединены общим названием «завлекалки». Отсюда и цель книги — влюбить вас, читатель, в древнейшую, но вечно цветущую науку — математику, мир которой, не менее, чем мир живой и неживой природы, полон неразгаданных и разгаданных тайн, удивительных и драматических явлений, захватывающих событий и поразительных открытий.

Творческая активность, находчивость, изобретательность и смекалка достигают высшего напряжения и получают отличную тренировку, когда мысль захвачена стремлением решить заинтересовавшую задачу. Найденное решение или даже чтение изложенного остроумного решения всегда вызывает умственное удовлетворение, эстетическое наслаждение.

Легкий юмор фавулы, неожиданность ситуации или развязки, доставляемой решением задачи, стройность геометрических форм, изящество решения, под которым понимается сочетание простоты и оригинальности методов его получения — вот основные элементы эстетики занимательных задач «на смекалку», и таковы возбудители сил притяжения внимания мыслящего человека.

Предлагаемая книга «завлекалок» непосредственно не учит математике, но в часы вашего активного отдыха доставит возмож-

ность побродить по тропинкам математики, подняться по ступенькам познания от низшей: опыта, созерцания, накопления наблюдений — к следующей: пониманию теоретических основ созерцаемого материала, выводам из наблюдений.

Желаю вам успеха!

Б. А. Кордемский

К большому сожалению, эта книга оказалась последней, написанной Борисом Анастасьевичем Кордемским (1907—1999), старейшим и известнейшим автором, мэтром отечественной научно-популярной литературы. За свою долгую и плодотворную жизнь он создал целый ряд разнообразных и увлекательных книг, пробуждающих интерес к математике, способствующих воспитанию математического мышления, развитию инициативы и сообразительности у многих поколений учащихся.

Все, кто знал Бориса Анастасьевича, сохранят память об этом высокоэрудированном, трудолюбивом, интеллигентном, отзывчивом и очень доброжелательном человеке.

А ларчик просто открывался.

И. А. Крылов

Глава 1

Всякая всячинка

Это — в басне дедушки Крылова. Наш «ларец» с немудренными, а подчас и хитроумными «завлекалками в математику» также откроется тому, кто вдумчив, сообразителен, настойчив в поисках разгадки.

1 Однажды...

1°. В день святой Пасхи Шустрик преподнес три крашенных яйца двум мамам и двум дочкам, причем каждая из них получила по одному целому яйцу. Как это вышло?

2°. В тот же день Мямлик подарил четырех щенков девочке и двум мальчикам, но так, что никто из них не получил щенков больше, чем остальные. Как это ему удалось?

3°. Вечером Шустрик и Мямлик затеяли забавную игру ладьями на шахматной доске. У каждого в распоряжении было не менее, чем по 4 ладьи. Оба игрока по очереди ставят ладьи на свободные клетки шахматной доски. Напомню, что ладья контролирует, то есть держит под угрозой «взятия» все метки вертикали и горизонтали, которым принадлежит клетка, занятая ладьей.



Выигрывает тот, после хода которого все клетки шахматной доски оказываются под контролем поставленных ладей.

Первый ход делает Шустрик. Придумайте такую стратегию игры, что если Мямлик будет ее придерживаться, то наверняка окажется победителем.

4°. К ребятам, закончившим игру, подошла Юля — сестренка Шустрика. В руках она держала два вырезанных из бумаги одинаковых прямоугольника (рис. 1).



Рис. 1

Требовалось, отрезав от каждого заштрихованные полоски, выбросить их, а один из оставшихся кусков разрезать на две части так, чтобы ими можно было полностью и точно покрыть второй кусок.

5°. Пока Шустрик и Мямлик преодолевали принесенную Юлей головоломку, сама Юля занялась решением другой геометрической задачи, в виде рисунка, на котором изображены: квадрат, вписанный в квадрат, и описанная окружность (рис. 2).

Требовалось найти длину радиуса окружности, если известно, что сторона малого квадрата равна 30 мм.



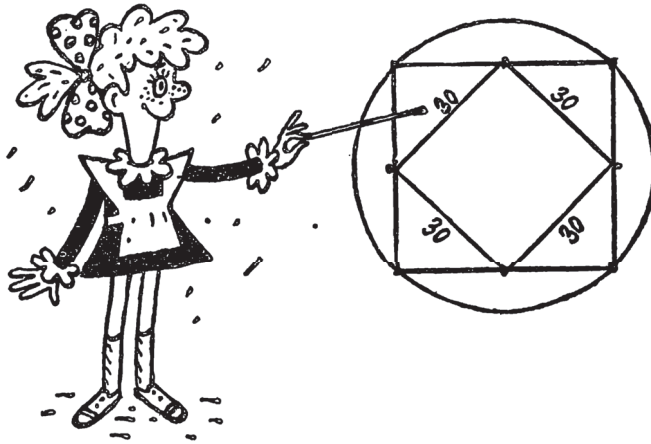


Рис. 2

6°. Произошло загадочное событие: один отец передал своему сыну в его личную библиотеку 600 книг. Другой отец поступил так же и пополнил библиотеку своего сына, передав ему 400 книг. Когда оба сына составили каталоги полученных книг, то оказалось, что их совместный книжный фонд увеличился лишь на 600 книг!

Странно, но — факт! В чем тут дело?

7°. Теплым весенним утром следующего дня ребята выпустили синичек из клетки, разделенной перегородками на 9 отдельных секций. Сколько птичек находилось в каждой секции, указано на плане клетки (рис. 3). Две секции, отделенные общей перегородкой, назовем соседними. Соседними секциями являются,

например, $\overline{9 \mid 5}$, или $\begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array}$.

0	3	2
6	7	0
4	9	5

Рис. 3

Выпускали синичек на волю не сразу всех, а в несколько приемов: выбирали какую-то пару соседних секций и за один прием из каждой секции выпускали по одинаковому числу птиц. Умело выбирая пары соседних секций, ребята выпустили всех птиц ровно за 5 приемов. Как они действовали?

8°. Мямлику хотелось, чтобы все-таки хотя бы одна-две птички остались в угловых секциях клетки (см. предыдущую задачу). Докажите принципиальную неосуществимость исполнения его желания при соблюдении обусловленного порядка действий по освобождению этих синичек из неволи.

9°. Юра Юркин — убежденный противник заключения птичек в клетки — заявил: «Пусть в клетках будут числа, а не птички». Он предлагает заполнить пустые клетки (рис. 4) четными числами от 2 до 32 так, чтобы получились верные равенства по строкам и столбцам.

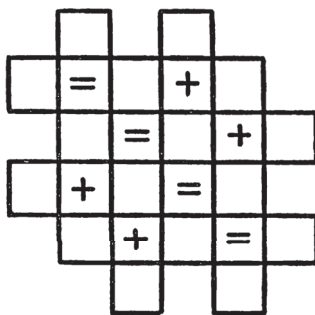


Рис. 4

10°. Если же все-таки к «синице» прибавить «синицу», то что получится? Правильно:

$$\begin{array}{r}
 \text{СИНИЦА} \\
 + \text{СИНИЦА} \\
 \hline
 \text{ПТИЧКИ}
 \end{array}$$

Заменяя одинаковые буквы одинаковыми цифрами, разные буквы — разными цифрами, добейтесь верного результата сложения двух «СИНИЦ».

2 И ещё много раз...

Шустрик и Мямлик развлекали друзей сеансом угадывания числа очков на тайно взятой кем-то из них плитке игры «Домино». Пусть взявший плитку домино с любым (не нулевым) числом очков на ее половинках, выполнит (про себя!) следующие действия:

- 1) умножит на 2 число очков любой половинки плитки домино;
- 2) к получившемуся произведению прибавит названное вами целое число (m);
- 3) получившуюся сумму умножит на 5;
- 4) к произведению прибавит число очков второй половины плитки домино. Пусть скажет результат.

Шустрик мысленно отнимает $5m$ и объявляет сколько очков на каждой половинке данной плитки домино.

Пример. Скрытно взятая плитка домино $\boxed{6} \boxed{3}$.

Названное Шустриком число $m = 7$. Действия:

1) $6 \cdot 2 = 12$; 2) $12 + 7 = 19$; 3) $19 \cdot 5 = 95$; 4) $95 + 3 = 98$ — результат, сообщенный Шустрику. Он вычисляет: $98 - 5 \cdot 7 = 63$

и заявляет: «Взятая плитка домино: $\boxed{6} \boxed{3}$ ».

Дайте объяснение этому фокусу.

3 Чирик, чирик!

Выпущенные на волю синички сразу разлетелись. Но из окна комнаты было видно, как на площадку возле дома мгновенно приземлились 23 синички. Через некоторое время они все разом вспорхнули и разделились на две стайки. Одна — села на крышу сарая, вторая — на изгородь. Потом 5 птичек перелетели с изгороди на ту же крышу сарая. Одновременно столько же синичек улетело с крыши куда-то. На жердочке изгороди осталось синичек вдвое больше, чем на крыше. Сколько синичек первоначально село на крышу и на изгородь?

4 А в коробках конфеты

Ящик заполнен одинаковыми коробками, а коробки — конфетами. Сколько всего коробок в ящике, если конфет в нем 3737

штук, причем известно, что коробок меньше, чем конфет в каждой коробке?

5 Танечка, хочешь пряничка?

— Ты получишь сразу 8 вкусных, мягких пряничков и две твои подружки — по столько же, если предварительно уравниешь количества пряников, находящихся в трех открытых коробках: 11 штук в первой, 7 — во второй и 6 — в третьей. Перекладывая пряники из одной коробки в другую, надо добавлять столько штук, сколько в ней есть.

Например, если в коробке 6 пряников, то и добавить следует ровно 6, взятых из какой-то одной коробки. Разрешается сделать только три перекладывания так, чтобы в каждой из трех коробок оказалось по 8 пряников.

Поделилась пряниками с подругами? Молодец!

Теперь, Танечка, придумай способ — четырьмя прямолинейными разрезами ножа рассечь один свой прямоугольный пряник на 8 равных кусочков, а второй пряник — тоже четырьмя разрезами — на 11 кусочков произвольной величины.

Замечание. Доказано, что любую плоскую фигуру можно разбить самое большее на $\frac{n^2 + n + 2}{2}$ частей, где n — число прямолинейных разрезов.

Будет достигнуто наибольшее число частей разбиваемой фигуры, если наметить прямолинейные разрезы так, чтобы каждый из них пересекался со всеми остальными, причем в одной точке не должно пересекаться более двух разрезов.

6 Он сказал правду

Гость Светланы сказал ей: «Позавчера мне было 10 лет, а в будущем году мне будет 13 лет». Удивительно, не правда ли? Но гость сказал правду.

В каком месяце и какого числа пришел мальчик в гости к Светлане?

7 Шустрик проектирует

В новом парке отдыха предполагается разместить вдоль трех concentрических дорожек 20 аттракционов, обозначенных на плане Шустрика буквами A, B, C, \dots, U (рис. 5). Между круговыми дорожками проложено несколько соединительных тропинок.

Парковый архитектор Н. Ситникова, одоббившая проект Шустрика, утверждает, что посетитель, избрав некоторый непрерывный маршрут по проложенным дорожкам и тропинкам, может побывать в каждом из 20 пунктов по одному разу и закончить обход в том же пункте, с которого начал.

Найдите возможный маршрут обхода всех 20 аттракционов, начинающийся в каком-либо пункте, расположенном на внутреннем кольце. Начните обход, например, с пункта A .

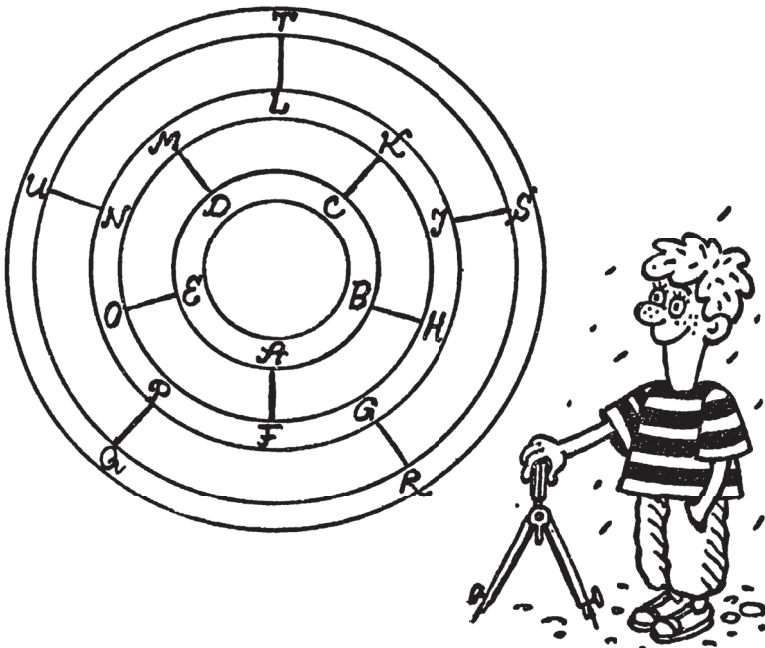


Рис. 5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ответы
Задачи и решения

Предисловие..... 3

Глава 1. Всякая всячинка

1. Однажды.....	5	287
2. И ещё много раз...	9	289
3. Чирик, чирик!.....	9	289
4. А в коробках конфеты.....	9	289
5. Танечка, хочешь пряничка?.....	10	289
6. Он сказал правду.....	10	290
7. Шустрик проектирует.....	11	290
8. Лабиринт паука.....	12	290
9. Вас интересует возраст нападающего?.....	12	291
10. Ноги и ножки.....	13	291
11. Школа? — Да. Колба? — Нет.....	13	291
12. Амебы в колбе.....	13	291
13. На арене цирка.....	14	291
14. Через пустыню.....	14	291
15. Привилегированные места для нечетных.....	14	291
16. Когда получение двойки не огорчает.....	15	291
17. Успех и неудача Шустрика.....	15	292
18. Три разряда мастерства.....	16	292
19. И снова успех.....	16	293
20. Недружные соседи.....	17	293
21. Проектируем парковую дорожку.....	17	294
22. Древнеримская арифметика.....	18	294
23. Это там — в Танзании.....	18	294
24. Диалог в квартире № 8.....	18	295
25. Сюзанна! Кто твой брат!.....	18	295
26. Ну и хитрюга же Шустрик!.....	19	295

27. Сам себя удивил	19	295
28. Четыре дамы с мужьями.....	20	296
29. Точки в строчке	20	296
30. В деление вмешиваются скобки	20	296
31. Про японскую девочку Юкко	20	296
32. Дольше, но полезнее	21	296
33. Практическая арифметика (две шутки)	21	296
34. Забавные совпадения	22	296
35. Внучки с бабушкой, внуки с дедушкой	22	296
36. Сто и одна	22	297
37. Числовой трюк	22	297
38. Фокус	23	297
39. Угадать число, ничего не спрашивая	23	297
40. Секрет системы раскладки	24	298
41. Мужественные — налево, женственные — направо	25	299
42. «Да хоть кого смутят вопросы быстрые» (А. Грибоедов)	26	299

Глава 2. Галерея сказок, фантазий...

43. Как придумывают числа	28	—
44. Приключения Пятерки	30	—
45. Куда пропала Двойка?.....	32	300
46. И днем и ночью кот ученый все ходит по цепи кругом... ..	32	300
47. Поможем Золушке	33	300
48. Продолжение сказки	34	301
49. Вот так гости!	34	301
50. Три девицы под окном... ..	35	302
51. В котором часу ложился спать Онегин?	35	302
52. Коварная принцесса	36	303
53. Как победил Иван-царевич Змея Горыныча	37	303
54. Как мужик гусей делил	37	303
55. Не по своим местам	38	303
56. Чашки-ложки для n медведей	39	304
57. Легенда о магическом квадрате Франклина	39	304
58. Прделки черта	40	304
59. Черт о студенте	41	304
60. «Город стар, город сед, городу 1140 лет» (Л. Мартынов)	42	305
61. Сказка о лжецах и правдолюбцах	42	305

62. Базарная логика	43	305
63. Фантастика в двух эпизодах	44	305
64. Кто первый сказал «Э!»	44	306
65. Луна грустила напрасно, или формула футбольного Мяча	45	306
66. Ну, Заяц, погоди!	47	307
67. Ох, эти дробь!	48	307
68. Пираты и зарытое сокровище	48	307
69. Другой вариант сказки о сокровище	49	308
70. Мастер, принцесса и солдат	50	309
71. Еще задача	52	309

Глава 3. Происшествия и приключения на тропинках математики

72. Утром в кафе	53	310
73. Вечный скиталец	54	310
74. Сколько сыновей и внуков?	55	310
75. Доярка и журналисты	55	311
76. В музее часов	56	311
77. Экстремальная ситуация	56	311
78. Чего нет в фильме «Спрут»?	57	312
79. Загадочные указатели расстояний	57	312
80. Алгоритм сильнее случая	57	312
81. Возрастная лесенка	58	312
82. Француженки в джинсах	59	312
83. Давно не виделись	59	313
84. Спортивные встречи на теннисном корте	60	314
85. Случай на конференции	60	314
86. Почему у Вали он бывает чаще?	60	314
87. Во всем нужна сноровка...	61	314
88. Быль иль небылица	62	315
89. Аналогичный эпизод	63	315
90. В лекционном зале больницы	63	315
91. Приключение с делением	63	316
92. Приключение с золотой цепочкой	63	316
93. Бывает же такое...	65	316
94. «Динамо»—«Ротор» — с каким счетом?	65	317
95. История одного занятого конкурса	66	317
96. Комбинации созревают на ветвях «дерева»	67	318

Глава 4. Плюс смекалка

97. Наш семейный «Брэйн-ринг»	70	319
98. Брачные пары за круглым столом	76	324
99. Черные или рыжие?	76	325
100. Встреча была короткой	77	325
101. Здравый смысл плюс смекалка	77	325
102. Венок не из ромашек и васильков... ..	77	325
103. Подсчитать не пересчитывая	79	326
104. Секущая шахматную доску	80	327
105. Двойка в головоломке	80	327
106. Все цифры в гости к нам... ..	80	327
107. С третьей попытки я угадал... ..	82	328
108. Как помолодеть городу?	83	328
109. Возраст девочки	83	329
110. Фокус с игральными кубиками	83	329
111. Секунды, секунды, секунды... ..	85	329
112. Вечное кружение часовых стрелок	85	329
113. Я не хочу брать последний пончик	86	331
114. Какой колосс колоссальнее?	87	332
115. Две тайны последней цифры	87	332
116. Магические спирали и окружности	87	332
117. По цветущему лугу	88	333
118. Гармония симметрии	88	334
119. Три кварты, три кварты... ..	88	335
120. «Улик» достаточно	90	336
121. Кросс чисел	91	336
122. Придумайте геометрическую модель	92	336
123. Играем в «очко»... ..	92	337
124. В тесной близости друг к другу... ..	93	338
125. Магия на плитках домино	94	338
126. Мозаика из разноцветных квадратиков	95	338

Глава 5. Тринадцать увлеченных чудаков

127. Чудак-рыбак	97	340
128. Кулинарка	98	341
129. Художник-абстракционист	98	341
130. Коллекционер	98	341
131. Госпожа ихтиолог	99	341
132. Программист	99	342
133. Кладовщик	100	342

134. Студент-логик	100	343
135. Закройщик	101	343
136. Ученик-геометр	102	343
137. Капитан и его сын	103	343
138. Вычислитель-выдумщик	105	—
139. Назойливый тринадцатый	106	344

Глава 6. Маленькие тайны чисел и фигур

140. «... Я скрывать не стану...»	109	345
141. Любовь с первого взгляда	111	345
142. Кубик из полоски	112	345
143. Исполин и пигмей	112	346
144. Превращение треугольника в прямоугольник	113	346
145. Все могут ... 10 цифр	113	346
146. Обойдемся без нуля	115	347
147. Две веселые теоремы	118	347
148. Головоломка на тему перестройки	118	348
149. Разыскиваются потерявшиеся числа	119	348
150. Оно растет, оставаясь квадратным	119	349
151. Неужели?	120	349
152. Семь бед — один ответ	120	349
153. Задача разметчика	122	351
154. Циркуль в шутке и в деле	122	352
155. Курьезные мелочи	123	352
156. Три сестры, ковер и письмо	125	353
157. Заколдованное число	126	353
158. Заколдованность исчезает... ..	127	354
159. Уникальная тройка integers	127	354
160. Фокус геометрии движения	127	—
161. «Неоконченная симфония» числовых зависимостей (в десяти частях)	129	354
162. Рождение «античного красавца»	130	355
163. Развертки моделей многогранников	131	355
164. Тайна развертки октаэдра	131	356
165. Геометрическая головоломка	132	356
166. «Пирамида Пифагора»	132	357
167. И у чисел бывают причуды	133	358
168. «Безобразную» пирамиду из частей квадрата ..	135	359
169. Интервью астронавта	136	359
170. Сказ о превращении стекляшки в алмаз	136	359
171. Арифметика — точильный камень способностей ..	138	360

172. Как прагматик, или как математик?	138	360
173. Лист Мебиуса и переплетение колец (Тринадцать опытов с бумажной полоской)	138	—

Глава 7. Издалека через века

174. Пифагорейский круг	144	361
175. Богом данные привилегии числу 7	145	362
176. Завещание магараджи	149	363
177. Задача-легенда	151	363
178. «Дайте мне точку опоры — и я сдвину Землю»	151	364
179. Сюрпризы диофантовых уравнений	152	364
180. Магическая сила единицы	154	364
181. Грузинские козы и русские овцы	155	364
182. Венецианская шутка с математическим смыслом (XVI в.)	156	365
183. Старинная китайская задача	156	365
184. ШИ-ЧАО-ТЮ	157	366
185. В старину и так умножали на Руси	160	369
186. Индийский прием умножения	162	—
187. «Волшебная кувшинка»	163	369
188. «Крестики-нолики» по Овидию и Шекспиру	163	369
189. Как это возможно?	164	369
190. Философская загадка Вольтера (в свободном переложении)	165	370
191. А в реальной ситуации?	165	370
192. Торговали — веселились, подсчитали — прослезились	165	370
193. Между прочим...	165	370
194. Сувенир из Индии	166	371
195. Стая обезьян (древнеиндийская задача)	167	371
196. Число 1729 становится историческим	167	371
197. Именные и безымянные числовые треугольники	168	—
198. Алфаметика — зашифрованная арифметика	171	371
199. Геометрическая классика	176	373
200. Будто витамин!	177	375
201. С ощущением волшебства	178	—
202. Это было так... (три ретрозамечания)	183	—
203. Поцелуй по расчету	184	—
204. Из геометрической фантастики	186	—
205. Пара шуточных реплик	188	—

Глава 8. Необычное в обычном

206. Причуды календаря	189	376
207. Числа-«самородки»	189	377
208. Может ли быть такое... ..	190	377
209. А еще найдете?	191	377
210. Какова совесть у вас?	192	377
211. Необычная манера приглашения, и все же... ..	192	377
212. Примечательные числа	192	378
213. Необычное в привычном	192	378
214. Маршрут через 5 точек... (головоломка)	193	378
215. Скрытая эстетика шестизначного числа	193	379
216. Клетки-соседки	194	379
217. Капризные соседки (продолжение)	194	380
218. «Не верь глазам своим»	195	380
219. Картинки равномерных процессов... ..	195	381
220. Волшебная красота магических квадратов	199	—
221. Студентки сдают экзамен по прыжкам в высоту	200	382
222. «Самоубийственная» дуэль	201	382
223. Диковинки среди простых чисел	201	383
224. Занятные стайки простых чисел	203	384
225. Совершенные числа	206	384
226. Математизированная юриспруденция	208	384
227. Проигравший Майк жаждет реванша	211	385
228. Сценарий — наш, исполнитель — компьютер	212	385

Глава 9. Совершаем открытия

229. Гарантированная делимость	214	386
230. Путь познания увлекателен, но не усыпан розами	214	386
231. С чего начинается «открытие»?	216	387
232. Быстрое формирование пифтриад	218	388
233. Замечательные квартеты	220	388
234. Три радиуса в одной «упряжке»	220	388
235. Только единицы нам и не хватало	221	389
236. Неожиданное родство трех разных задач	221	389
237. Феномены среди квадратных чисел	224	389
238. Курьезы гипотенузы	226	—
239. Две фотографии трех средних	226	390

240. Гармоническая последовательность и музыкальные интервалы	229	390
241. Ряд из чисел, а сам — не число	230	391
242. Четыре «открытия» в одной головоломке	232	391

Глава 10. Семнадцать мгновений наедине с математикой

Задача 1	236
Задача 2	237
Задача 3	237
Задача 4	238
Задача 5	239
Задача 6	240
Задача 7	240
Задача 8	241
Задача 9	242
Задача 10	242
Задача 11	242
Задача 12	243
Задача 13	244
Задача 14	244
Задача 15	245
Задача 16	246
Задача 17	247

Глава 11. Поэтический калейдоскоп

Лирика счета	251
Поэтикоарифметика	265
Вечнозеленая арифметика	267
Чары линий и фигур	272
Ответы и решения	287
Оглавление	393