ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

В. В. Зайцев, В. В. Рыжков, М. И. Сканави

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В. В. Зайцев

Москва
Мир и Образование

Книга посвящена светлой памяти
В. В. Зайцева, В. В. Рыжкова, М. И. Сканави

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является дополненным переизданием классического справочника «Элементарная математика» авторов В. В. Зайцева, В. В. Рыжкова, М. И Сканави, который выходил под редакцией М. И. Сканави. Данное издание дополнено частью «Начала математического анализа». Ее включение было продиктовано необходимостью удовлетворения требований к изучению дисциплины «Математика» согласно ФГОС среднего общего образования.

Новая часть справочника — «Начала математического анализа» — подготовлена Зайцевым Владимиром Владимировичем. В основу этой части вошли конспекты лекций и методические материалы по проведению семинарских занятий его отца — Зайцева Владимира Валентиновича, проработавшего 40 лет в МЭИ в должности заместителя заведующего кафедрой «Специальные курсы высшей математики».

Справочник состоит из трех частей: «Арифметика, алгебра и элементарные функции»; «Геометрия»; «Начала математического анализа». Авторы стремились изложить весь теоретический материал в рамках программы вступительных экзаменов и проиллюстрировать его на примерах и задачах. Также в каждом параграфе даются упражнения для самостоятельной работы. В конце книги приводятся ответы ко всем упражнениям.

Книга представляет собой повторительный курс. Она рассчитана на читателя, уже изучавшего предмет, но желающего пополнить, укрепить и систематизировать свои знания. Поэтому предполагается, что, излагая тот или иной вопрос, можно ссылаться для пояснения или достижения полноты освещения вопроса и на последующий материал, предусматривая, что читатель имеет о нем хотя бы общее представление. Таких ссылок в тексте довольно много; для удобства пункты, на которые разбит материал, снабжены сплошной нумерацией. Ссылки даются в виде (см. п. 184) или просто (п. 55). Рисунки также имеют сплошную нумерацию; формулы имеют двойной номер (например, (4.5) или (217.3), т. е. пятая формула пункта 4 или третья формула пункта 217).

Мелким шрифтом выделен материал, не входящий в минимальную обязательную программу.

Эта книга написана для учащихся старших классов средней школы и абитуриентов, желающих повторить курс математики, например, с целью подготовить себя к вступительным экзаменам в высшую школу. Она может быть использована и как пособие на подготовительных курсах вузов, и для самостоятельных занятий.

Цель, которую поставили перед собой авторы, определяет построение книги и ее язык. В ней устраняются элементы концентризма, допускаемые в школьных программах, когда при первичном изучении математики приходится учитывать возрастные возможности учащихся и другие обстоятельства. При повторном изучении курса математики естественно построить его так, чтобы логически законченные темы излагались по возможности в одном месте. Например, развитие понятия числа от натурального до комплексного прослеживается в одной главе.

Кроме того, авторы стремились приблизить изложение многих вопросов (функции, графики, вычисление площадей и объемов и др.) к методам, принятым в курсе математики вуза. Необходимость такого изложения, перебрасывающего мостик от школьной математики к вузовской, видна из тех трудностей, которые часто испытывают на первом курсе вуза даже хорошо подготовленные учащиеся.

При подготовке первого издания большую работу по проверке ответов к упражнениям проделал Сергей Беркесов.

Используя данную книгу в комплекте со «Сборником задач по математике для поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканави, учащиеся старших классов смогут успешно подготовиться к выпускным экзаменам в школе — сдаче ОГЭ и ЕГЭ, а также к поступлению даже в самый сложный технический вуз.

Часть первая

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Глава I

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Действительные числа. Координаты

1. Натуральные числа. *Натуральные числа* выражают количество подлежащих счету однотипных или неоднотипных предметов; таковы, например, числа один, два, десять, двадцать, сто, двести пятьдесят шесть, тысяча и т. д.

Понятие натурального числа относится к простейшим, первоначальным понятиям математики и не подлежит определению через другие, более простые понятия.

Натуральные числа могут быть естественным образом расположены по их возрастанию: каждое следующее натуральное число получается из предыдущего прибавлением единицы. Записанные в порядке возрастания:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ \ldots,$$

натуральные числа образуют *натуральный ряд*. Многоточие показывает возможность неограниченного продолжения этого ряда. В этом смысле говорят, что имеется *бесконечное множество* натуральных чисел. Единица — наименьшее натуральное число; наибольшего числа натуральный ряд не имеет.

Напомним принцип записи натуральных чисел в десятичной системе счисления при помощи десяти цифр

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

Цифры, участвующие в записи числа, при чтении их справа налево указывают последовательно, сколько в данном числе содержится единиц, затем десятков, сотен, тысяч и т. д. Вообще, цифра, стоящая на k-м месте, считая справа, покажет, сколько данное число содержит единиц разряда 10^{k-1}.

Так, например,

$$18 = 1 \cdot 10 + 8,$$
$$347 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7,$$
$$5096 = 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 6$$

и, в общей форме, для m-значного числа a_m:

$$a_m = c_1 \cdot 10^{m-1} + c_2 \cdot 10^{m-2} + \ldots + c_{m-1} \cdot 10 + c_m, \qquad (1.1)$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — цифры, при помощи которых число a_m записывается в виде $\overline{c_1 c_2 \ldots c_m}$ (здесь черта сверху ставится, чтобы не смешивать число a_m с произведением чисел $c_1, c_2, \ldots, c_m$).

Замечание. Десятичная система счисления — не единственно возможная. В древности (в Вавилоне) использовалась система счисления, в которой, наряду с десяткой, в основу было положено число 60 (шестидесятеричная система счисления). Ее влияние сохранилось до сих пор в делении часа на 60 минут, окружности на 360 градусов и т. д. В настоящее время при использовании электронных вычислительных машин, в процессе программирования применяются двоичная и восьмеричная системы счисления. Приведем для примера запись нескольких чисел в троичной системе. В этом случае используем только три цифры 0, 1, 2 в их обычном смысле. Число 3 в троичной системе играет роль десятки в десятичной системе счисления и должно обозначаться как 10. Вместо $3^2 = 9$ будем писать 100 и т. д. Вот запись нескольких чисел в десятичной и троичной системах счисления:

Десятичная система	Троичная система
17	122 $(= 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1)$
55	2001 $(= 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1)$
100	10201 $(= 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1)$

В дальнейшем мы будем пользоваться исключительно десятичной системой счисления.

В арифметике и алгебре рассматривают различные действия над числами: *сложение*, *вычитание*, *умножение*, *деление*, *возведение в степень*, *извлечение корня* и т. д. Первые четыре из этих действий называют *арифметическими* или *рациональными*. Но только два из них — сложение и умножение — безусловно выполнимы в области натуральных чисел: *сумма и произведение натуральных чисел суть снова натуральные числа*.

Сформулируем законы, которым подчиняются действия сложения и умножения; строгие определения этих действий и обоснование их свойств (выводимых из небольшого числа аксиом) рассматриваются в теоретической арифметике и здесь опускаются.

Переместительный (или *коммутативный*) *закон сложения:*

$$a + b = b + a \qquad (1.2)$$

— от перестановки слагаемых сумма не изменяется.

Переместительный (или *коммутативный*) *закон умножения:*

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad (1.3)$$

— от перестановки сомножителей произведение не изменяется. В дальнейшем, по большей части, в записи произведения $a \cdot b$ точку опускаем и пишем просто ab.

Глава III

ЛОГАРИФМЫ

§ 1. Логарифмы по произвольному основанию

26. Определение и свойства логарифмов. В соотношении

$$a^x = N$$

может быть поставлена задача отыскания любого из трех чисел a, N, x по двум другим, заданным. Если даны a и x, то N находят действием возведения в степень. Если даны N и x, то a находят извлечением корня степени x (или возведением в степень $1/x$). Теперь рассмотрим случай, когда по заданным a и N требуется найти x.

Пусть число N положительно: $N > 0$, число a положительно и не равно единице: $a > 0$, $a \neq 1$.

Определение. *Логарифмом числа N по основанию a* называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить число N; логарифм обозначается через $\log_a N$:

$$a^{\log_a N} = N. \qquad (26.1)$$

Таким образом, в равенстве (26.1) показатель степени x находят как логарифм N по основанию a. Записи

$$a^x = N \quad \text{и} \quad x = \log_a N \qquad (26.2)$$

имеют одинаковый смысл. Равенство (26.1) иногда называют основным тождеством теории логарифмов; в действительности оно выражает определение понятия логарифма. По данному определению *основание логарифма a всегда положительно и отлично от единицы; логарифмируемое число N положительно.* Отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют. Можно доказать, что всякое число $N > 0$ при данном основании a ($a > 0$, $a \neq 1$) имеет вполне определенный логарифм. Поэтому равенство $a^x = a^y$ влечет за собой $x = y$. Заметим, что здесь существенно условие $a \neq 1$, в противном случае вывод $x = y$ был бы не обоснован, так как равенство $1^x = 1^y$ верно при любых значениях x и y.

Пример 1. Найти $\log_2 \frac{1}{8}$.

Решение. Для получения числа $^1/_8$ следует возвести основание 2 в степень -3: $2^{-3} = 1/2^3 = {}^1/_8$. Поэтому $\log_2 \frac{1}{8} = -3$. Можно проводить записи при решении таких примеров в следующей форме:

$$2^x = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2^{-3}, \qquad x = -3.$$

Пример 2. Найти $\log_{1/3} 9\sqrt[3]{3}$.

Решение. Имеем

$$9\sqrt[3]{3} = 3^2 \cdot 3^{1/3} = 3^{7/3} = ({}^1/_3)^{-7/3}; \qquad \log_{1/3} 9\sqrt[3]{3} = -{}^7/_3.$$

В примерах 1 и 2 мы легко находили искомый логарифм, представляя логарифмируемое число как степень основания с рациональным показателем. В общем случае, например для $\log_2 3$, $\log_3 5$ и т. д., этого сделать не удастся, так как логарифм имеет иррациональное значение. Обратим внимание на один связанный с этим утверждением вопрос. В п. 12 мы дали понятие о возможности определения любой действительной степени данного положительного числа. Это было необходимо для введения логарифмов, которые, вообще говоря, могут быть иррациональными числами.

Рассмотрим некоторые свойства логарифмов.

Свойство 1. *Если число и основание равны, то логарифм равен единице*, и, обратно, *если логарифм равен единице, то число и основание равны.*

Доказательство. Пусть $N = a$. По определению логарифма имеем $a^{\log_a a} = a = a^1$, откуда

$$\log_a a = 1. \tag{26.3}$$

Обратно, пусть $\log_a N = 1$. Тогда по определению $N = a^{\log_a N} = a^1 = a$.

Свойство 2. *Логарифм единицы по любому основанию равен нулю.*

Доказательство. По определению логарифма $a^{\log_a 1} = 1 = a^0$ (нулевая степень любого положительного основания равна единице, см. (10.1)). Отсюда

$$\log_a 1 = 0, \tag{26.4}$$

что и требовалось доказать.

Верно и обратное утверждение: *если* $\log_a N = 0$, *то* $N = 1$. Действительно, имеем $N = a^{\log_a N} = a^0 = 1$.

Прежде чем сформулировать следующее свойство логарифмов, условимся говорить, что *два числа a и b лежат по одну сторону от третьего числа c*, если они оба либо больше c, либо меньше c. Если одно из этих чисел больше c, а другое меньше c, то будем говорить, что они *лежат по разные стороны от c*.

Глава XXII

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИЯ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 1. Понятие о производной и первообразной функции

270. Физический смысл производной функции. Одной из характеристик поведения соответствующей функции является скорость ее изменения.

Рассмотрим некоторые примеры функций, описывающих следующие простые физические явления: 1) прямолинейное движение; 2) линейное распределение массы; 3) нагревание тела. Для характеристики этих явлений вводят соответственно такие понятия, как: 1) скорость движения, 2) плотность, 3) теплоемкость, — которые, с математической точки зрения, представляют собой частные виды одного и того же понятия «производная функции».

В подтверждение этого предположения, разберем каждое из перечисленных явлений в отдельности.

I. Скорость прямолинейного движения. Пусть тело совершает прямолинейное движение и нам известно расстояние s, проходимое телом за каждое данное время t, т. е. нам известно расстояние s как функция времени t:

$$s = F(t).$$

Уравнение $s = F(t)$ называется *уравнением движения*, а определяемая им линия в системе осей Ost — *графиком движения*.

Рассмотрим движение тела в течение интервала времени Δt от некоторого момента t до момента $t + \Delta t$. За время t тело прошло путь $s = F(t)$, а за время $t + \Delta t$ — путь $s + \Delta s = F(t + \Delta t)$. Значит, за Δt единиц времени оно прошло путь

$$\Delta s = F(t + \Delta t) - F(t).$$

Если движение равномерное, то s есть линейная функция от t

$$s = v_0 t + s_0.$$

В этом случае $\Delta s = v_0\Delta t$, и отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ $(= v_0)$ показывает, сколько единиц пути s приходится на единицу времени t; при этом оно остается *постоянным*, не зависящим ни от того, какой момент времени t берется, ни от того, какое взято приращение времени Δt. Это постоянное отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ называют *скоростью равномерного движения*. Но если движение неравномерное, то отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ пути к времени зависит и от t, и от Δt. Оно называется *средней скоростью движения* в интервале времени от t до $t + \Delta t$ и обозначается через $v_{\text{ср}}$:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

В течение этого интервала времени при одном и том же пройденном расстоянии движение может происходить самым различным образом; графически это иллюстрируется тем, что между двумя точками на плоскости Ost (точки A и B на рис. 433) можно провести самые различные линии (AC_1B, AC_2B, AC_3B) — графики движений в данном интервале времени, причем всем этим разнообразным движениям соответствует одна и та же средняя скорость $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. В частности, между точками A и B проходит прямолинейный отрезок (ABC), являющийся графиком равномерного движения в интервале $(t; t + \Delta t)$. Значит, *средняя скорость* $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ показывает, с какой *скоростью* нужно двигаться *равномерно* для того, чтобы пройти за этот же интервал времени $(t; t + \Delta t)$ то же расстояние Δs.

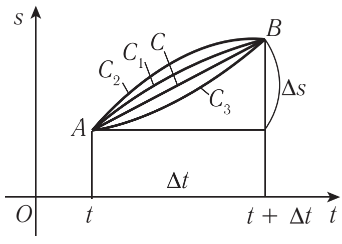

Рис. 433.

Оставляя прежним t, уменьшим Δt.

Средняя скорость, подсчитанная для измененного интервала $(t; t + \Delta t)$, $\Delta t_1 < \Delta t$, лежащего внутри данного интервала, будет иной, чем во всем

ОГЛАВЛЕНИЕ